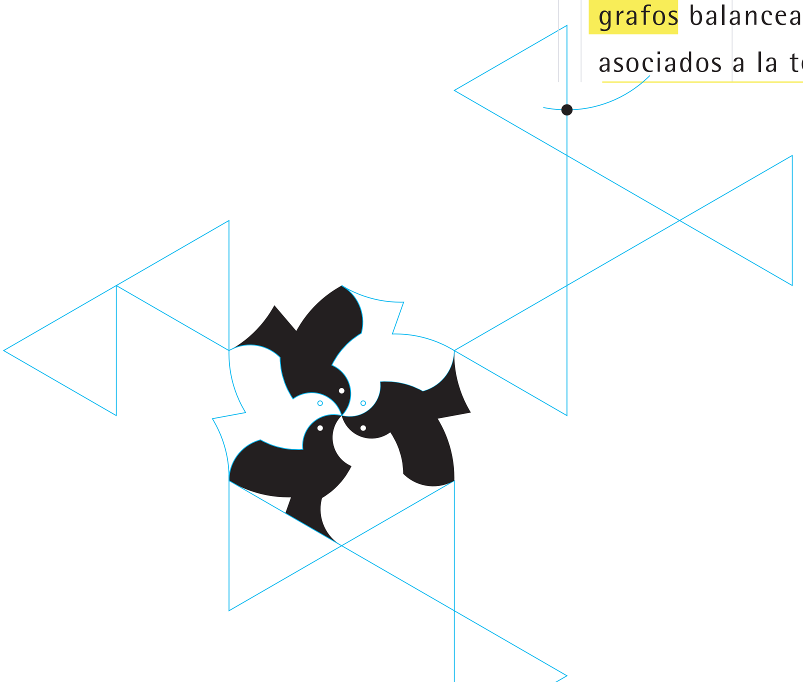
Tesis de Licenciatura

Sobre grafos balanceados y complejidad computacional de problemas asociados a la teoría de grafos perfectos.



Flavia Bonomo
(fbonomo@dc.uba.ar)

Departamento de Matemática
FCEyN - UBA

Director: Guillermo A. Durán

Marzo 2002

A mi familia, que son lo que más quiero en el mundo

Agradecimientos

A Willy, mi director, por toda su ayuda, por ser un excelente director y por ser tan buena persona, realmente fue un placer trabajar con él.

A Dani, Luli y Ale, mis hermanitos del alma, por ayudarme y aguantarme siempre, y en especial este verano para que pueda terminar de escribir.

A mis papás por ser los mejores del mundo, por haberme apoyado siempre, por hacer el esfuerzo y venir a mi tesis y a mamá también por haberme llevado para el lado de la matemática.

A Abu por ser como es.

A Marina, por ser una excelente compañera de trabajo y amiga.

A mis amigos: Daniel, Matilde, Romi, Dora, Gaby, Santi, Edu, Pablo, Julian, Silvia, Malena, Agustín, Gustavo, Gustavo, Fernando, Juan Pablo, Ale, Adrián, Lean, Horacio, Nico, Xavier, Javier, Agus, Hernán, Patricia, a mi "equipo": Darío, Sergio y Pablo, y a Igna, cada uno sabe por qué.

A Marina por el diseño de la tapa.

A Juan por haberme apoyado siempre a lo largo de la carrera.

A Oscar y a Jayme por su gran colaboración y a Paula, Pablo, Irene e Isabel por su ayuda.

Resumen

Los grafos perfectos fueron introducidos por Berge en los inicios de la década del '60 y a partir de allí fueron extensamente estudiados en la literatura. Se dice que un grafo G es perfecto cuando el número cromático es igual al tamaño del clique máximo para todo subgrafo inducido de G.

En esta tesis determinamos la complejidad computacional de los problemas algorítmicos asociados a los grafos perfectos y sus variantes (grafos clique-perfectos, grafos K-perfectos, grafos coordinados) tanto en el caso general como dentro de la clase de los grafos clique-Helly hereditarios.

Definimos los grafos balanceados como aquellos cuya matriz clique es balanceada. Es sabido que las matrices balanceadas son perfectas y, en consecuencia, los grafos balanceados son grafos perfectos. Mostramos que la clase de los grafos balanceados tiene reconocimiento polinomial, encontramos nuevas caracterizaciones para esta clase en términos de sus ciclos impares y de sus cliques y estudiamos algunas de sus subclases.

El grafo clique de un grafo G es el grafo intersección de los subgrafos completos maximales de G. Los grafos clique han sido estudiados en el contexto de grafos de intersección y operadores en grafos. En 1971, Roberts y Spencer dieron una caracterización para la clase de grafos clique $K(G)$. Sin embargo, ningún algoritmo eficiente ha podido ser formulado en función de esa caracterización. La caracterización de los grafos clique ha sido realizada para diversas clases de grafos, mientras que para algunas otras aún es un problema abierto. En esta tesis caracterizamos los grafos clique de varias clases de grafos, entre ellas los grafos balanceados, los totalmente unimodulares, los grafos clique-Helly y perfectos y los grafos trivialmente perfectos.

Indice

Capítulo 1

Introducción

Dado un grafo G, una *clique* en G es un subgrafo completo maximal. Se define $\omega(G)$ como el tamaño de una clique máxima de G, y $\chi(G)$ (el número cromático de G) como la mínima cantidad de colores necesaria para colorear los vértices de G de modo que dos vértices adyacentes tengan distinto color.

En 1961, Berge definió los grafos perfectos como aquellos grafos G tales que $\omega(H) = \chi(H)$ para todo subgrafo inducido H de G.
Varias clases conocidas de grafos son perfectas, como los grafos bipartitos, los grafos cordales o triangulados y los grafos de comparabilidad.
Los grafos perfectos son interesantes desde el punto de vista algorítmico, ya que, por ejemplo, los problemas de hallar el tamaño de la clique máxima y el número cromático son NP-completos para grafos en general y para varias subclases, mientras que para los grafos perfectos pueden ser resueltos en tiempo polinomial.

Al definir los grafos perfectos Berge planteó la siguiente conjetura: *Un grafo es perfecto si y sólo si no contiene como subgrafo inducido un agujero impar ni el complemento de un agujero impar.* Un agujero impar es un ciclo sin cuerdas de longitud impar y mayor ó igual a 5.
Esta conjetura se conoce como *Strong Perfect Graph Conjecture* y aún sigue sin ser resuelta, aunque se demostró que vale para ciertas subclases de grafos, por ejemplo para grafos sin alguno de los posibles grafos de cuatro vértices como subgrafo inducido.

Un resultado más débil es el siguiente: *Un grafo es perfecto si y sólo si su complemento es perfecto.*
Este teorema fue demostrado por Lovász en 1972 (11 años después de ser conjeturado por Berge) e independientemente también fue probado por Fulkerson.

A partir de un grafo se construye su matriz clique, en la cual cada columna representa un vértice del grafo y cada fila es el vector característico de una clique del grafo.

Dada una matriz A, se define el poliedro $P(A) = \{x|Ax \leq 1, x \geq 0\}$. Una matriz A es perfecta si el poliedro $P(A)$ tiene sólo extremos con coordenadas enteras.
Chvátal demostró en 1975 un teorema que relaciona los grafos perfectos con las matrices perfectas: *Un grafo es perfecto si y sólo si su matriz clique es perfecta.*

Matrices balanceadas e ideales aparecen en el contexto de matrices perfectas, por lo tanto resulta natural definir los grafos balanceados y los grafos ideales como los grafos cuya matriz clique es balanceada o ideal, respectivamente. Estos grafos no están definidos en la literatura, pero sí hay algunos resultados sobre matrices balanceadas e ideales.
Definiendo el poliedro $Q(A) = \{x|Ax \geq 1, x \geq 0\}$, una matriz A es ideal si el poliedro $Q(A)$ tiene sólo extremos con coordenadas enteras.
Una matriz es balanceada si no contiene como submatriz la matriz de incidencia de un ciclo impar, y totalmente balanceada si no contiene como submatriz la matriz de incidencia de un ciclo.
Fulkerson, Hoffman y Oppenheim probaron en 1974 que las matrices balanceadas son perfectas e ideales. Conforti, Cornuéjols y Rao hallaron en 1999 un algoritmo polinomial para decidir si una matriz es balanceada, basado en propiedades de descomposición de las matrices balanceadas. Existen diversas caracterizaciones, tanto de las matrices balanceadas e ideales como de las matrices minimalmente no balanceadas y las matrices minimalmente no ideales.

Por otro lado, se define $\alpha_C(G)$ como el cardinal de un conjunto máximo de cliques independientes, y $\tau_C(G)$ como el cardinal de un conjunto mínimo de vértices que intersecan todas las cliques de G.
Los grafos clique-perfectos fueron definidos por Guruswami y Pandu Rangan en el año 2000 como aquellos grafos G en los cuales $\alpha_C(H) = \tau_C(H)$ para todo subgrafo inducido H de G.
Existe una conjetura sobre la caracterización de los grafos clique-perfectos mediante subgrafos prohibidos, planteada originalmente por J. Szwarcfiter [109] y sobre la cual se trabajó en [59].

Dada una familia finita de conjuntos no vacíos, el grafo intersección de esta familia se obtiene representando cada conjunto por un vértice y conectando dos vértices por un arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan.
El grafo clique de un grafo G es el grafo intersección de las cliques de G.
Los grafos de intersección fueron y son actualmente muy estudiados, y en particular los grafos clique.
Hamelink dio una caracterización parcial de los grafos clique en 1968, mientras que Roberts y Spencer en 1971 la extendieron a una caracterización completa. Sin embargo, ningún algoritmo eficiente ha podido ser formulado en función de esa caracterización. Más aún: es uno de los problemas abiertos más notorios en el campo de la teoría de grafos la complejidad computacional del reconocimiento de los grafos clique.

Los grafos clique de varias clases de grafos ya fueron caracterizados. Algunas de esas clases son los árboles, los grafos de intervalos, los grafos cordales, los grafos de bloques, los grafos arco-circulares Helly, los grafos clique-Helly y los clique-Helly hereditarios, mientras que para algunas otras aún es un problema abierto.
En [59], M. Groshaus estudia los grafos cuyo grafo clique es perfecto y su relación con los grafos clique-perfectos.

Describimos ahora la forma en que está organizado este trabajo.

En este capítulo, además de definir los temas principales de la tesis, se presentan una serie de definiciones básicas de teoría de grafos y la notación utilizada, un resumen sobre clases de grafos, una breve introducción sobre complejidad de algoritmos, una breve introducción a la teoría poliedral y programación lineal y un resumen sobre clases de matrices.

El Capítulo 2 trata sobre grafos perfectos y algunas de sus variantes: grafos clique-perfectos, grafos coordinados y grafos K-perfectos. Presentamos los principales resultados conocidos sobre estas clases y los problemas algorítmicos relacionados. Exhibimos una familia de grafos altamente no-coordinados y demostramos que los grafos coordinados son Berge. Por último, analizamos el comportamiento del operador clique sobre algunas subclases de los grafos perfectos y aportamos nuevos resultados originales que aparecen en [13].

El Capítulo 3 está destinado a estudiar la complejidad de los problemas algorítmicos relacionados con los grafos perfectos y sus variantes, tanto en el caso general como dentro de la clase de los grafos clique-Helly hereditarios. Los resultados de este capítulo son originales de esta tesis y aparecen en [13].

El Capítulo 4 trata sobre grafos balanceados. Definimos esta nueva clase de grafos, damos diversas caracterizaciones de los mismos y demostramos que tienen un reconocimiento polinomial. Definimos principalmente cuatro subclases de los grafos balanceados en función de sus ciclos impares y estudiamos las intersecciones entre estas clases. Por último, analizamos el comportamiento del operador clique sobre las diferentes clases de grafos estudiadas. Los resultados de este capítulo son originales de esta tesis y aparecen en [14].

En el Capítulo 5 presentamos algunas conclusiones que surgen de este trabajo y las líneas futuras de investigación.

1.1 Definiciones básicas y notación

Denotaremos un grafo G por un par $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto finito, el conjunto de vértices de G, y $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices de G, llamados aristas. Sean $n = |V(G)|$ y $m = |E(G)|$. Un grafo se dice *trivial* si tiene un solo vértice.

Un vértice v es adyacente a otro vértice w en G si $(v, w) \in E(G)$. Decimos que v y w son los extremos de la arista. El vecindario de un vértice v es el conjunto $N(v)$ que consiste de todos los vértices adyacentes a v. El vecindario cerrado de v es $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.
Un vértice v es universal cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$. Un vértice v es aislado cuando $N(v) = \emptyset$. El grado de un vértice v es el cardinal del conjunto $N(v)$ y se nota d(v). Dado un grafo G, notamos $\delta(G)$ al grado mínimo y $\Delta(G)$ al grado máximo entre los vértices de G.

El complemento de un grafo G, denotado por $\overline{G}$, es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices de G y tal que dos vértices distintos son adyacentes en $\overline{G}$ si y sólo si no son adyacentes en G.

Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Si $V(H) = V(G)$, decimos que H es un subgrafo generador de G. Dado un conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$, el subgrafo de G inducido por X es el subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ y $E(H)$ es el conjunto de aristas de G que tiene ambos extremos en X.

Dos grafos G y H son isomorfos si existe una biyección entre $V(G)$ y $V(H)$ que conserva las adyacencias. En este caso, notamos $G = H$.

Un camino en un grafo G es una secuencia de vértices distintos $P = v_1, v_2, ..., v_k$, donde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, ..., k-1$. Una cuerda en P es una arista que une dos vértices no consecutivos de P. Un camino inducido es un camino sin cuerdas. Denotamos por P_k al camino inducido por k vértices.

Un grafo G es conexo si para todo par de vértices distintos v y w de G existe un camino de v a w.
La distancia entre dos vértices v y w en G es la longitud del camino más corto entre v y w (la longitud de un camino se mide por la cantidad de aristas que lo componen) y se nota $d_G(v, w)$. Si el contexto no es ambiguo, se abrevia $d(v, w)$.
El disco $D_k(v)$ de centro v y radio k ($k \geq 0$) es el conjunto de vértices de G que están a distancia menor o igual que k de v.

Un circuito en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, v_2, ..., v_k$, no necesariamente distintos, donde $v_1 = v_k$ y $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $i = 1, ..., k-1$. Un ciclo en un grafo G es una secuencia de vértices $C = v_1, v_2, ..., v_k$, donde $v_1, ..., v_k$ es un camino, v_1 es adyacente a v_k y $k \geq 3$. Una cuerda en C es cualquier cuerda del camino $v_1, v_2, ..., v_k$ excepto (v_1, v_k). Si los vértices que une la cuerda en C están a distancia 2, decimos que la cuerda es corta. Un ciclo es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos C_k al ciclo inducido por k vértices (C_3 es también llamado triángulo). C_k es conocido como el agujero de k vértices.

Un conjunto S es maximal (minimal) en relación a una determinada propiedad P si S satisface P, y todo conjunto S' que contiene propiamente a S (que está contenido propiamente en S) no satisface P.

Un grafo G es completo si cualquier par de vértices distintos de G son adyacentes. Llamamos K_n al grafo completo con n vértices.
Un conjunto de vértices M de un grafo G es un subgrafo completo si el subgrafo inducido por M es completo. Una clique es un subgrafo completo maximal de G. Notaremos $C(G)$ al conjunto de cliques del grafo G. Un parámetro bastante estudiado en un grafo G es $\omega(G)$, definido como el cardinal de una clique máxima de G.

Un conjunto de vértices I de un grafo G es un conjunto independiente si el subgrafo inducido por I no tiene aristas. Otro parámetro muy estudiado de un grafo G es su número de estabilidad $\alpha(G)$, definido como el cardinal de un conjunto independiente máximo de G.

Un coloreo de un grafo G es una partición de $V(G)$, donde cada clase de la partición es un conjunto independiente al que identificamos con un color. Un k-coloreo es una partición de $V(G)$ en k conjuntos independientes. Si G admite un k-coloreo, decimos que G es k-cromático. El número cromático de G es el menor k para el cual existe un k-coloreo de G y se nota $\chi(G)$.

Un cubrimiento de los vértices de un grafo G por cliques es un conjunto de cliques de G tales que cada vértice de G pertenece al menos a una de ellas. El cardinal de un cubrimiento de vértices por cliques mínimo se nota $k(G)$.

Un cubrimiento de las cliques de un grafo G por vértices es un conjunto de vértices de G que tiene intersección no vacía con cada clique de G. Lo denominamos transversal de las cliques. El cardinal de un transversal de las cliques mínimo se nota $\tau_C(G)$.

Un conjunto de cliques de un grafo se dice independiente si las cliques son disjuntas dos a dos. El cardinal de un conjunto independiente de cliques máximo de G se nota $\alpha_C(G)$.
Al mínimo k tal que existe una partición de las cliques de G en k conjuntos de cliques independientes lo notaremos $F(G)$.

Dado un grafo G y un vértice v de G, notaremos $C(v)$ al conjunto de cliques de G a las cuales pertenece v y $m_G(v)$ al cardinal de dicho conjunto. Un vértice es llamado uniclical si está contenido en exactamente una clique y multiclical en otro caso. El máximo de los $m_G(v)$ con v en G se nota $M(G)$.

Si $e = (v, w)$ es una arista de G, notaremos C_e al conjunto de cliques de G que contienen a ambos vértices, v y w. Una arista se dirá uniclical si está contenida en exactamente una clique de G y multiclical en otro caso.

Un grafo G es un diamante si es isomorfo a $K_4 - \{e\}$, para e cualquier arista de K_4.
Un grafo es una rueda W_j si es isomorfo a un ciclo inducido C_j al que se le agrega un vértice universal.
Un grafo es un abanico F_j si es isomorfo a un camino inducido P_j al que se le agrega un vértice universal.

Un grafo es una estrella si es isomorfo a un conjunto independiente al que se le agrega un vértice universal.
Un t-sol es un grafo con $2t$ vértices, $t \geq 3$, que se pueden particionar en $W = \{w_1, \ldots, w_t\}$ y $U = \{u_1, \ldots, u_t\}$ donde W es un conjunto independiente, U induce un subgrafo completo y $(w_j, u_i) \in E(G)$ si y sólo si $i \equiv j$ ó $i \equiv j + 1 \pmod{t}$.

Dado un grafo G, definimos el grafo de líneas $L(G)$ como un nuevo grafo en el cual los vértices son las aristas de G y dos vértices en $L(G)$ son adyacentes si y sólo si las correspondientes aristas en G tienen un vértice en común.

Definimos $G^* = G \cup \{v\}$, donde v es un vértice aislado que se agrega al grafo G, y $G^+ = G \cup \{v\}$, donde v es un vértice universal que se agrega al grafo G.

Decimos que G es un digrafo, o un grafo dirigido, si las aristas están dadas por un conjunto de pares ordenados de vértices.
Decimos que G es un multigrafo si se permite que entre un mismo par de vértices se trace más de una arista.

Dado un grafo F, un grafo G se dice F-free si no contiene como subgrafo inducido a F y, más generalmente, dados grafos $F_1, F_2, \ldots, F_k$, un grafo se dice $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$-free si no contiene como subgrafo inducido a ninguno de los F_i.
Un grafo H es una estructura prohibida para una determinada clase de grafos si un grafo en dicha clase no puede contener a H como subgrafo inducido. La estructura prohibida será minimal si cualquier subgrafo inducido propio de ella pertenece a la clase.

Un concepto muy usado a lo largo de este trabajo es el de la propiedad de Helly. Una familia de subconjuntos S satisface la propiedad de Helly cuando toda subfamilia de S consistente en subconjuntos que se intersecan de a pares tiene intersección no vacía.

Una propiedad en grafos es hereditaria cuando se verifica que si un grafo tiene la propiedad, cualquier subgrafo inducido de él también la tiene.

Dado un grafo G cuyos vértices están numerados de 1 a n, definimos la matriz de adyacencia de G como $M \in \{0,1\}^{n \times n}$ donde $M(i,j) = 1$ si los vértices i y j son adyacentes y 0 en otro caso.
Numerando las aristas de G de 1 a m, definimos la matriz de incidencia de G como $M \in \{0,1\}^{m \times n}$ donde $M(i,j) = 1$ si el vértice j es uno de los extremos de la arista i y 0 en otro caso.
Por último, numerando las cliques de G de 1 a k, definimos la matriz clique de G como $A_G \in \{0,1\}^{k \times n}$ donde $A_G(i,j) = 1$ si el vértice j pertenece a la clique i y 0 en otro caso.

Usualmente, nos referiremos a las filas o columnas de una matriz binaria como si fueran conjuntos.
En general, dada una matriz A cuyas filas están indexadas por el conjunto F y cuyas columnas están indexadas por el conjunto C, identificaremos la fila $i \in F$ con el conjunto $\{j \in C | A(i,j) = 1\} \subseteq C$ y, análogamente, identificaremos la columna $j \in C$ con el conjunto $\{i \in F | A(i,j) = 1\} \subseteq F$.

Entonces decimos que una fila está incluída en otra cuando lo están sus correspondientes conjuntos, o que dos columnas se intersecan cuando la intersección entre sus correspondientes conjuntos es no vacía.
Dada una matriz binaria A, llamamos grafo inducido por A (o derivado de A) al grafo intersección de sus columnas.

1.2 Clases de grafos

Consideremos una familia finita de conjuntos no vacíos. El grafo intersección de esta familia se obtiene representando cada conjunto por un vértice y conectando dos vértices por un arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan. Es sencillo probar que todo grafo es un grafo intersección de alguna familia.

Los grafos intersección han recibido mucha atención en el estudio de la teoría algorítmica de grafos y sus aplicaciones ([56], [86]). Algunas clases especiales muy estudiadas de grafos de intersección son los grafos de intervalos, los cordales, los arco-circulares, los circulares, los grafos de línea y los grafos clique.

El grafo clique de G, $K(G)$, es el grafo intersección de las cliques de G. Por lo tanto K es un operador que transforma un grafo en otro grafo. Podemos definir $K^j(G)$ como la j-ésima iteración del operador clique sobre el grafo G, es decir, $K^1(G) = G$ y $K^j(G) = K(K^{j-1}(G))$ para $j \geq 2$.

Dada una clase de grafos $\mathcal{H}$, definimos $K(\mathcal{H})$ como la clase de los grafos clique de grafos en $\mathcal{H}$ y $K^{-1}(\mathcal{H})$ como la clase de los grafos cuyos grafos clique están en $\mathcal{H}$ (estos últimos son llamados grafos clique-inversos de $\mathcal{H}$). Decimos que una clase $\mathcal{H}$ es fija bajo el operador K si $K(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, y que dos clases $\mathcal{H}$ y $\mathcal{L}$ son clique-duales si $K(\mathcal{H}) = \mathcal{L}$ y $K(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$. En la tabla 1.1 mostramos las clases de grafos clique caracterizadas hasta el momento.

Un grafo arco-circular es el grafo intersección de arcos alrededor de un círculo. Un grafo G es arco-circular Helly si existe una familia de arcos alrededor de un círculo que verifican la propiedad de Helly y tal que G es el grafo intersección de dicha familia.

Un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo. Un grafo G es circular Helly si existe una familia de cuerdas dentro de un círculo que verifican la propiedad de Helly y tal que G es el grafo intersección de dicha familia.

Un grafo de intervalos es el grafo intersección de intervalos en una recta. Un grafo de intervalos propios es el grafo intersección de intervalos propios en una recta. Un grafo de intervalos propios minimales es el grafo intersección de intervalos propios en una recta, donde el número de puntos extremos de los intervalos es $2|C(G)| - |C(K(G))|$.

Un grafo G es un árbol si es conexo y no contiene ciclos.

Un grafo UV es el grafo intersección de caminos de un árbol. Un grafo DV es el grafo intersección de caminos de un árbol dirigido. Un grafo RDV es

Clase $\mathcal{A}$	$K(\mathcal{A})$	Ref.
Arco-circular Helly	Cliques circulares	[38]
Bloques	Bloques	[70]
Circular Helly	Dualmente Circular Helly	[80]
Clique-Helly	Clique-Helly	[42]
Cordales	Dualmente Cordales	[15, 18, 63]
Clockwork	Clockwork	[78]
DE	Dualmente DE	[64]
Disco-Helly	Disco-Helly	[6]
Desmontables	Desmontables	[6]
Dualmente Cordales	Cordales $\cap$ Clique-Helly	[18, 63]
Dualmente Circular Helly	Circular Helly	[80]
Dualmente DE	DE	[64]
Dualmente DV	DV	[66, 98]
Dualmente RDV	RDV	[16, 98]
DV	Dualmente DV	[66, 98]
$\mathcal{H}_1$	$\mathcal{H}_1$	[35]
Clique-Helly hereditarios	Clique-Helly hereditarios	[97]
Intervalos	Intervalos Propios	[71]
Intervalos Propios	Intervalos Propios	[71]
Intervalos Propios Minimales	Intervalos Propios	[65]
Ptolomeicos	Ptolomeicos	[6]
RDV	Dualmente RDV	[16, 98]
Sin Diamantes	Sin Diamantes	[24]
Split	Estrellas	
Fuertemente Cordales	Fuertemente Cordales	[6, 18]
Arboles	Bloques	[70]
UV	Dualmente UV	[15]

Tabla 1.1: Clases de grafos clique

el grafo intersección de caminos de un árbol dirigido con raíz. Un grafo DE es el grafo arista-intersección de caminos de un árbol dirigido, donde se cosidera que dos caminos se intersecan si comparten alguna arista.

Un grafo G es cordal (o triangulado) si G no contiene al ciclo inducido C_k como subgrafo inducido, para $k \geq 4$. Equivalentemente, es el grafo intersección de subárboles de un árbol.

Un grafo G es *split* cuando G y $\overline{G}$ son cordales, o equivalentemente, cuando su conjunto de vértices puede ser particionado en una clique y un conjunto independiente.

Un grafo G es fuertemente cordal si G es cordal y no contiene como subgrafo inducido a un t-sol, para $t \geq 3$. Son equivalentes a los grafos totalmente balanceados, grafos cuya matriz clique es totalmente balanceada.

Un grafo G es grafo de línea si existe un grafo H tal que $L(H) = G$, o sea, G es el grafo de líneas de H.

Un bloque en un grafo es una componente biconexa maximal. Un grafo de bloques es el grafo intersección de los bloques de un grafo.

Un grafo es disco-Helly si sus discos satisfacen la propiedad de Helly.

Un grafo es clique-Helly si sus cliques satisfacen la propiedad de Helly. Un grafo G es clique-Helly hereditario si todo subgrafo inducido de G es clique-Helly.

Un grafo G es bipartito si no contiene ciclos impares o, equivalentemente, si su conjunto de vértices puede ser particionado en dos conjuntos independientes.

Un grafo G sin diamantes es un grafo que no tiene como subgrafo inducido a un diamante. También es equivalente decir que cada arista de G es uniclical.

Un grafo G es $\mathcal{H}_1$ cuando para cada par de vértices v_1, $v_2 \in V(G)$, $\exists M_1$, $M_2 \in C(G)$ tal que $v_1 \in M_1 \setminus M_2$ y $v_2 \in M_2 \setminus M_1$.

Un grafo G se llama *Ptolomeico* si dados cuatro vértices $u, v, w, t \in V(G)$, se satisface $d_G(u,v) \cdot d_G(w,t) \leq d_G(u,w) \cdot d_G(v,t) + d_G(u,t) \cdot d_G(v,w)$.

Un grafo G es *desmontable* si es un grafo trivial o tiene un vértice dominado v (es decir, $\exists w / N[v] \subseteq N[w]$) tal que $G - \{v\}$ es desmontable.

La forma habitual de dibujar un grafo en el plano es representando los vértices por puntos y las aristas por curvas entre sus extremos, que no pasan por ningún otro vértice. Un grafo G es planar si existe una representación de G en el plano de modo que las aristas no se crucen, excepto en los vértices.

Un grafo $G = (V(G), E(G))$ es de comparabilidad si es posible direccionar sus aristas de modo de que el grafo dirigido resultante $G' = (V(G), D(G))$ satisfaga: $(u,v) \in D(G), (v,w) \in D(G) \Rightarrow (u,w) \in D(G)$.

Un grafo G es dualmente cordal si admite un árbol generador T, tal que para cada subgrafo completo H de G, los vértices de H inducen un subárbol conexo en T.

Un grafo G es dualmente DV si admite un árbol generador dirigido T, tal que para cada subgrafo completo H de G, los vértices de H inducen un camino dirigido en T.

Un grafo G es dualmente RDV si admite un árbol generador dirigido T con raíz, tal que para cada subgrafo completo H de G, los vértices de H inducen un camino dirigido con raíz en T.

Un grafo G es dualmente circular Helly si existen un conjunto de puntos P y un conjunto de cuerdas L en un círculo tal que las intersecciones de las cuerdas pertenecen a P, las cuerdas verifican la propiedad de Helly y hay una correspondencia entre los vértices de G y los puntos de P de manera tal que dos vértices son adyacentes en G si y sólo si hay una cuerda de L que pasa por los puntos correspondientes en P.

Decimos que un grafo tiene *cliques circulares* si admite un orden circular de sus vértices y un cubrimiento de sus aristas por subgrafos completos que verifican la propiedad de Helly y están formados por vértices consecutivos en dicho orden.

Un grafo G es perfecto si $\chi(H) = \omega(H)$ para todo H subgrafo inducido de G. Un grafo G es Berge si no contiene como subgrafo inducido ni un ciclo inducido impar de longitud ≥ 5 ni su complemento.

Un grafo G es K-perfecto si su grafo clique $K(G)$ es perfecto.

Un grafo G es clique-perfecto si $\tau_C(H) = \alpha_C(H)$ para todo H subgrafo inducido de G.

Un grafo G es coordinado si $M(H) = F(H)$ para todo H subgrafo inducido de G.

Una completa recopilación sobre clases de grafos aparece en [17].

1.3 Complejidad algorítmica

Un problema algorítmico $\pi(I, Q)$ consta de un conjunto I de todas las posibles entradas para el problema, llamado el conjunto de instancias, y de una pregunta Q sobre esas instancias. Resolver uno de estos problemas consiste en desarrollar un algoritmo cuya entrada es una instancia del problema y cuya salida es una respuesta a la pregunta del problema.
Decimos que un problema es de decisión cuando las posibles respuestas a la pregunta son SI ó NO. Por ejemplo, π podría ser el siguiente problema: "dado un grafo G, ¿ es balanceado ?". El conjunto de instancias es el conjunto de todos los grafos y la pregunta es saber si el grafo dado es o no balanceado. El problema dado no sólo es de decisión sino que, en particular, es un problema de reconocimiento. Es de sumo interés tanto desde el punto de vista teórico como de las aplicaciones estudiar problemas de reconocimiento para las diferentes clases de grafos.
Un problema es de optimización cuando lo que se busca a través de la pregunta es la solución óptima para el problema formulado. Por ejemplo, "dado un grafo G, ¿ cuál es la menor cantidad de colores necesaria para colorear a G ?"
Usualmente, los problemas de optimización tienen su variante de decisión. En el caso del coloreo será: "dado un grafo G y un entero k positivo, ¿ existe un coloreo de G con menos de k colores ?"
Un problema es de enumeración cuando lo que se busca no es la existencia de una solución o la solución óptima sino la cantidad de soluciones para el problema formulado. Por ejemplo, "dado un grafo G y un entero k positivo, ¿ de cuántas formas distintas es posible colorear a G con k colores ?"

Diremos que un algoritmo es polinomial cuando el número de operaciones que efectúa está acotado por una función polinomial en el tamaño de su entrada. Si el tamaño de la entrada es n y la función polinomial es $f(n)$, decimos que el algoritmo tiene complejidad $O(f(n))$. Los problemas de decisión para los que existen algoritmos polinomiales constituyen la clase P y son llamados polinomiales.

Un problema de decisión es no-determinístico polinomial cuando cualquier instancia que produce respuesta SI posee una comprobación de correctitud (también llamada certificado) verificable en tiempo polinomial en el tamaño de la instancia. Estos problemas de decisión pertenecen a la clase NP.
Claramente, P $\subseteq$ NP. Sin embargo, no se sabe si esta inclusión es estricta: uno de los principales problemas abiertos en informática teórica es saber si P $\neq$ NP.
Un problema de decisión pertenece a la clase co-NP cuando cualquier instancia que produce respuesta NO posee un certificado polinomial en el tamaño de la instancia.
Sean $\pi_1(I_1, Q_1)$ y $\pi_2(I_2, Q_2)$ dos problemas de decisión. Una transformación polinomial de π_1 en π_2 es una función $f : I_1 \to I_2$ que satisface las siguientes dos condiciones:

1. f puede computarse en tiempo polinomial.
2. Para toda instancia $D \in I_1$, D produce respuesta SI para π_1 si y sólo si $f(D)$ produce respuesta SI para π_2.

Una definición esencial en la teoría de complejidad es la definición de problema NP-completo. Un problema de decisión π pertenece a la clase NP-completo cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\pi \in$ NP.
- Para todo problema $\pi' \in$ NP, existe una transformación polinomial de π' en π.

Un problema de decisión π pertenece a la clase NP-hard cuando se satisface la siguiente condición:

- Para todo problema $\pi' \in$ NP, existe una transformación polinomial de π' en π.

La teoría de NP-completitud fue iniciada por Cook en 1971 [31]. Allí probó que el problema de satisfactibilidad de la lógica matemática es NP-completo, en un resultado que se conoce como el Teorema de Cook. Primero Karp [75], y tiempo después Garey y Johnson [50], presentaron largas listas de problemas NP-completos en el campo de la combinatoria, la lógica, la teoría de conjuntos, la teoría de grafos y otras áreas de la matemática discreta.
La técnica standard para probar que un problema π es NP-completo es la siguiente: elegir en forma apropiada un problema π' que ya sabemos que es NP-completo y luego probar que $\pi \in$ NP y que π' es transformable polinomialmente en π. Si sólo probáramos esta segunda parte, habríamos probado que el problema π es NP-hard.

No se conoce ningún algoritmo polinomial para resolver un problema NP-completo. Surge de la definición de NP-completitud que si se encontrara un algoritmo polinomial para un problema en esta clase, todo problema en NP sería polinomial (y estaría probado, en consecuencia, que P = NP).

Similarmente, se define una clase de complejidad para los problemas cuya respuesta es un número natural, en la cual entran la mayoría de los problemas de enumeración relacionados con problemas NP-completos y algunos problemas de aritmética como por ejemplo calcular la permanente de una matriz [118]. Un problema π está en la clase #P si para toda instancia D de π, cuya respuesta es n, la respuesta posee una comprobación de correctitud (también llamada certificado) verificable en tiempo $n.p(|D|)$, donde p es un polinomio que depende de π.
Sean $\pi_1(I_1, Q_1)$ y $\pi_2(I_2, Q_2)$ dos problemas cuyas respuestas son números naturales. Una transformación polinomial de π_1 en π_2 es una función $f : I_1 \to I_2$ que satisface las siguientes dos condiciones:

1. f puede computarse en tiempo polinomial.
2. Para toda instancia $D \in I_1$, D produce la misma respuesta para π_1 que $f(D)$ para π_2.

En forma análoga a los problemas de decisión, un problema π pertenece a la clase #P-completo cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\pi \in$ #P.
- Para todo problema $\pi' \in$ #P, existe una transformación polinomial de π' en π.

Un problema π pertenece a la clase #P-hard cuando se satisface la siguiente condición:

- Para todo problema $\pi' \in$ #P, existe una transformación polinomial de π' en π.

La teoría de #P-completitud fue iniciada por Valiant en 1977 [118, 119]. Allí probó, entre otros resultados, que el problema de calcular la cantidad de cliques de un grafo es #P-completo. En base a un resultado de Simon [106], quien observó que la transformación genérica utilizada en la demostración del Teorema de Cook se podría hacer respetando la cantidad de soluciones, se puede probar también que el problema de contar la cantidad de valuaciones distintas que hacen verdadera a una instancia del problema de satisfactibilidad de la lógica matemática es #P-completo [92].

Resultados sobre complejidad de algoritmos pueden encontrarse en [50] y [92].

1.4 Programación lineal y teoría poliedral

Un poliedro es un conjunto $P = \{x \in \Re^n : Ax \leq b\}$, donde $A \in \Re^{m \times n}$ y $b \in \Re^m$.

Dado un conjunto finito de puntos $K = \{v_1, \ldots, v_t\} \subseteq \Re^n$, la cápsula convexa de K, llamada $conv(K)$, es la intersección de todos los conjuntos convexos que incluyen a K.
Un conjunto de puntos en $\Re^n$ es convexo si dados dos puntos x e y en el conjunto, el segmento determinado por ellos pertenece al conjunto.
Una combinación convexa de los puntos de K es un punto v de la forma $v = \sum_{i=1}^t \alpha_i v_i$ con $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^t \alpha_i = 1$. Una combinación convexa se dice *propia* cuando al menos dos de los α_i son no nulos.
Es un resultado conocido que

$$conv(K) = \Big\{ \sum_{i=1}^{t} \alpha_i v_i : \alpha_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{t} \alpha_i = 1 \Big\}$$

es decir, la cápsula convexa de un conjunto K es el conjunto de todas las combinaciones convexas de los puntos de K.

Dado un conjunto finito de puntos $K = \{v_1, \ldots, v_t\} \subseteq \Re^n$, el cono determinado por K es $cono(K) = \Big\{ \sum_{i=1}^t \alpha_i v_i : \alpha_i \geq 0 \Big\}$.
Minkowski demostró que todo poliedro puede ser escrito como $P = conv(K) + cono(K')$ para dos conjuntos finitos K y K' de puntos y, por lo tanto, todo poliedro resulta ser un conjunto convexo.
El poliedro P es acotado si y sólo si K' es vacío.

El punto v es un extremo del poliedro P si v no puede ser escrito como combinación convexa de dos o más puntos en P.
Un poliedro se dice entero cuando sus extremos son enteros.

Un problema de programación lineal es un problema de maximización que tiene la siguiente forma:

$$z = \max\{cx : x \in P\} \tag{1.1}$$

Donde $P = \{x : Ax \leq b\}$ es un poliedro y $c \in \Re^n$.

Si el problema lineal (1.1) tiene un óptimo, entonces existe un extremo de P que realiza el óptimo y puede hallarse en tiempo polinomial [76].

Dado un problema de programación lineal

$$\max\{cx : Ax \leq b,\ x \geq 0\},$$

definimos su *problema dual* como:

$$\min\{yb : yA \geq c,\ y \geq 0\}.$$

Si x es una solución factible del primal e y es una solución factible del dual, entonces $cx \leq yb$.

El teorema de dualidad fuerte dice que el óptimo del problema primal tiene el mismo valor que el óptimo del problema dual [49].

Un problema de programación lineal entera es un problema de maximización que tiene la siguiente forma:

$$z = \max\{cx : x \in P,\ x \in Z^n\} \tag{1.2}$$

Donde $P = \{x : Ax \leq b\}$ es un poliedro y $c \in \Re^n$.

El problema de programación lineal entera es NP-hard [90].

La relajación lineal de un problema de programación lineal entera es el problema de programación lineal que resulta al eliminar la restricción " $x \in Z^n$ ". Si los extremos de P son enteros, entonces el problema coincide con su relajación lineal y puede resolverse en tiempo polinomial.

Resultados sobre teoría poliedral y programación lineal pueden encontrarse en [25], [8] y [90].

1.5 Clases de matrices

Una *matriz binaria* es una matriz A cuyas entradas $A(i,j)$ son ceros ó unos. En general, denotaremos por $\mathbf{1}$ al vector de unos de la dimensión correspondiente en cada caso.

Dada una matriz A, definimos los poliedros $P(A) = \{x|Ax \leq \mathbf{1}, x \geq 0\}$, $Q(A) = \{x|Ax \geq \mathbf{1}, x \geq 0\}$ y $R(A) = \{x|Ax = \mathbf{1}, x \geq 0\}$.

Una matriz binaria A es perfecta cuando los extremos del poliedro $P(A)$ son enteros.

Una matriz binaria A es ideal cuando los extremos del poliedro $Q(A)$ son enteros.

Una matriz binaria es balanceada cuando no contiene como submatriz a la matriz de incidencia de un ciclo impar.

Una matriz binaria es totalmente balanceada cuando no contiene como submatriz a la matriz de incidencia de un ciclo.

Una matriz binaria A es totalmente unimodular si el determinante de cualquier submatriz cuadrada de A es 0, 1 ó -1.

Las matrices balanceadas son perfectas e ideales, y tanto las matrices totalmente balanceadas como las totamente unimodulares, son balanceadas.

Resultados sobre estas clases de matrices pueden encontrarase en [32].

Capítulo 2

Grafos perfectos y sus variantes

En este capítulo resumiremos los resultados existentes sobre grafos perfectos, grafos clique-perfectos, grafos coordinados y grafos K-perfectos.
Finalmente, estudiaremos como actúa el operador clique sobre algunas subclases de los grafos perfectos.

2.1 Grafos perfectos

Los grafos perfectos fueron definidos por Claude Berge en el año 1960 [9], y se convirtieron en uno de los temas más estudiados en la teoría de grafos. Hay gran cantidad de trabajos publicados sobre grafos perfectos, entre los principales podemos destacar la monografía de Golumbic [56] y los trabajos de Fulkerson [44, 45, 46], Lovász [81, 82] y Chvátal [26].
Recordemos algunas definiciones para un grafo G:

$\omega(G)$: tamaño de una clique máxima de G.

$\chi(G)$: número cromático de G, el menor k tal que G es k-coloreable, o equivalentemente, el tamaño de una partición mínima de los vértices de G en conjuntos de vértices independientes.

$\alpha(G)$: tamaño de un conjunto independiente de vértices máximo en G.

$k(G)$: tamaño de un recubrimiento mínimo de los vértices de G por cliques de G.

Notemos que para cualquier grafo G, se verifica

$$\omega(G) \leq \chi(G) \text{ y } \alpha(G) \leq k(G),$$

y además,

$$\alpha(G) = \omega(\overline{G}) \text{ y } k(G) = \chi(\overline{G}).$$

Definición 2.1 Un grafo G se dice *perfecto* si $\omega(H) = \chi(H)$ para todo subgrafo inducido H de G.

En 1961, Berge planteó la siguiente conjetura: *"un grafo es perfecto si y sólo si su complemento lo es"*. Fue demostrada luego de más de 10 años por Lóvasz e independientemente por Fulkerson, poco después, y hoy se conoce como el Teorema de los Grafos Perfectos.

Teorema 2.1 (Lovász, 1972) [81] *Dado un grafo G, son equivalentes:*

(P_1) $\omega(H) = \chi(H)$ *para todo subgrafo inducido H de G*

(P_2) $\alpha(H) = k(H)$ *para todo subgrafo inducido H de G*

(P_3) $\omega(H)\alpha(H) \geq |H|$ *para todo subgrafo inducido H de G*

La equivalencia $(P_1) \Leftrightarrow (P_2)$ fue demostrada también por Fulkerson [46], quien para su demostración desarrolló importantes resultados de teoría poliedral.

Definición 2.2 Diremos que un grafo G es *Berge* si no contiene como subgrafo inducido a C_{2k+1} ni a $\overline{C_{2k+1}}$ para $k \geq 2$.

Dado que los grafos C_{2k+1} y $\overline{C_{2k+1}}$ $(k \geq 2)$ no son perfectos, es claro que los grafos perfectos son necesariamente Berge. La propiedad recíproca se conoce como Conjetura Fuerte de los Grafos Perfectos (SPGC).

Conjetura 2.1 (Berge, 1961) [10] *Si G es un grafo Berge, entonces es perfecto.*

Si bien aún no ha sido probada para el caso general se demostró que la conjetura es cierta para una gran cantidad de clases de grafos.
En 1992 Prömel y Steger [99] mostraron que la SPGC es asintóticamente verdadera: si denotamos por $P(n)$ y $B(n)$ al conjunto de los grafos de n vértices perfectos y Berge respectivamente, se cumple que $lim_{n\to\infty}\frac{|P(n)|}{|B(n)|} = 1$.

Definición 2.3 Un grafo G es *minimalmente imperfecto* si no es perfecto, pero todos sus subgrafos inducidos lo son.

Esta nueva definición da lugar a una versión equivalente de la conjetura.

Conjetura 2.2 (SPGC, segunda versión) *Los únicos grafos minimalmente imperfectos son los grafos C_{2k+1} y $\overline{C_{2k+1}}$.*

Esta versión de la conjetura dice que no existen grafos Berge minimalmente imperfectos. Un grafo con esas características se conoce con el nombre de *monstruo*. Gurvich y Hougardy [62] y Gurvich y Udalov (citado en [34]), demostraron que un monstruo, de existir, debe tener por lo menos 25 vértices, superando un resultado previo de Lam [77].

Presentamos aquí algunas clases de grafos para las cuales se ha probado la SPGC:

- *Grafos circulares*, demostrado por Buckingham y Golumbic [19, 20].
- *Grafos planares*, por Tucker [115, 21].
- *Grafos con grado máximo menor que 7*, por Grinstead [58].
- *Grafos pretty*, grafos en los cuales todo subgrafo inducido tiene un vértice v cuya vecindad es $\{P_4, 2K_2\}$-free, por Maffray, Porto y Preissmann [85].

La conjetura también está probada para la clase de grafos F-free (y por lo tanto para la clase de grafos $\overline{F}$-free), para varios grafos F.
En particular, para todos los grafos F con $|V(F)| = 4$:

- P_4*-free*, por Seinsche [105].
- *paw-free*, por Parthasarathy y Ravindra [93], Hsu [72].
- $(K_4$*-e*$)$*-free* o *sin diamantes*, por Tucker [113] y Conforti [28].
- K_4*-free*, por Tucker [116, 114, 111].
- C_4*-free*, por Cornuéjols, Conforti y Vušković [30].

Para el caso $|V(F)| = 5$, la conjetura está probada para:

- *bull-free*, por Chvátal y Sbihi [27].
- *dart-free*, por Sun [107].
- *chair-free*, por Sassano [104].

La SPGC sigue abierta para otros grafos prohibidos F de 5 vértices (es claro que demostrar la conjetura para los grafos C_5-free equivale a demostrar la conjetura en el caso general). El caso más estudiado es el de $F = P_5$, sobre el cual han trabajado Olariu [91], Maffray y Preissmann [83], y Barré junto a Fouquet [7], entre otros.

El problema se atacó también desde el punto de vista de los operadores en grafos, para algunos operadores Φ, se demostró que la clase de grafos $\Phi(G)$ es una clase donde vale la SPGC. Por ejemplo:

- *Grafos de línea*, basado en resultados sobre grafos $K_{1,3}$-free.
- *Grafos totales*, por Rao y Ravindra [101]. El grafo total $T(G)$ de un grafo $G = (V, E)$ tiene como conjunto de vértices a $V \cup E$, donde el subgrafo inducido por V es G, el subgrafo inducido por E es $L(G)$, y además cada vértice correspondiente a una arista de G es adyacente a los vértices correspondientes a sus dos extremos.
- *Grafos triangulares*, por Le [79]. El grafo triangular de G, $L_3(G)$, tiene un vértice por cada triángulo de G, donde dos vértices son adyacentes en $L_3(G)$ si los triángulos correspondientes de G tienen una arista en común.

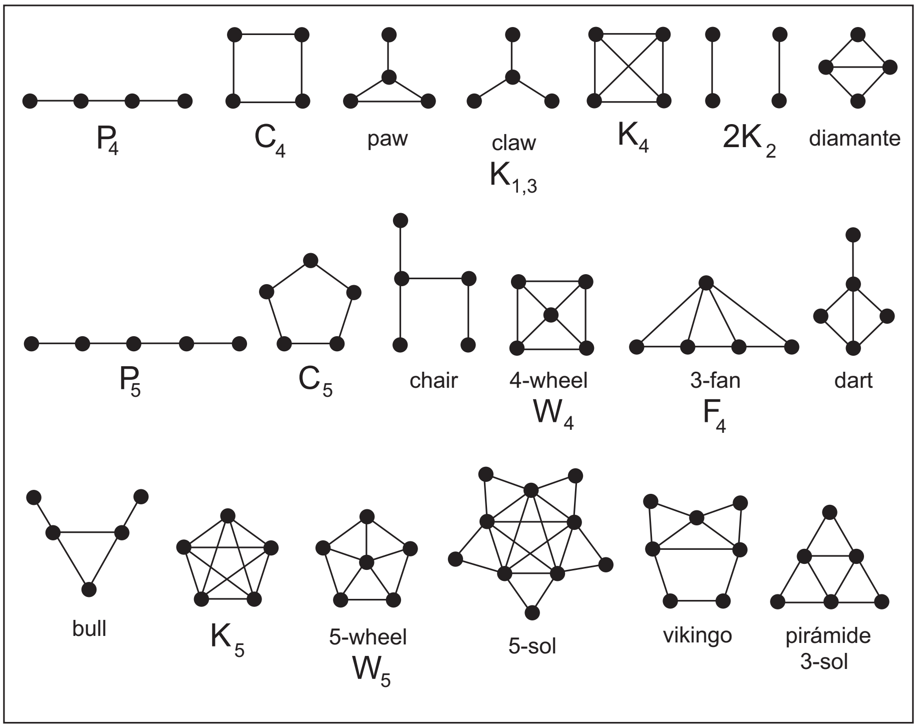


Figura 2.1: Grafos con nombre

Existe una versión más débil de la SPGC que también se mantiene abierta hasta el presente.

Conjetura 2.3 (Gyarfas, 1987) [67] *Existe una función f tal que para todo grafo G Berge, $\chi(G) \leq f(\omega(G))$.*

Esta función f claramente debe satisfacer $f(x) \geq x$. Notemos que la SPGC dice que la desigualdad se verifica para la función identidad.
Algunos resultados sobre los problemas abiertos mencionados anteriormente, fueron tratados a partir de esta nueva conjetura. Wagon [120] en primer lugar y Gyarfas [67], llegaron a los siguientes resultados:

- Para todo grafo C_4-free G, no necesariamente Berge,

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2}\omega(G)(\omega(G)+1)$$

- Para todo grafo P_5-free G, no necesariamente Berge,

$$\chi(G) \leq 4^{\omega(G)-1}$$

La importancia de los grafos perfectos, dio lugar a que se definieran diversas variantes de estos grafos.

Definición 2.4 Un grafo G se denomina *trivialmente perfecto* si, para todo subgrafo inducido H, se verifica $\alpha(H) = |C(H)|$ (donde $|C(H)|$ es el número de cliques de H).

Wolk [121] y Golumbic [56] probaron el siguiente resultado:

Teorema 2.2 *Sea G un grafo, entonces G es trivialmente perfecto si y sólo si G es $\{P_4, C_4\}$-free.*

Claramente, los grafos trivialmente perfectos son perfectos. Berge en los años '60 probó que muchas clases de grafos conocidas son perfectas, como los grafos de comparabilidad, los grafos bipartitos, los cordales o triangulados, los grafos totalmente unimodulares y todos sus complementos [9, 10].

2.1.1 Parámetros $\alpha(G)$ y $k(G)$

Dado un grafo G, definimos una matriz clique de G como una matriz binaria A_G tal que sus columnas están indexadas por los vértices de G, sus filas están indexadas por las cliques de G, y $A_G(i,j) = 1$ si y sólo si el vértice j pertenece a la clique i.

Por otra parte, dada una matriz binaria A, definimos su grafo inducido G_A como el grafo intersección de sus columnas.

En particular, si G es un grafo, el grafo inducido por A_G es G, y vale lo siguiente:

Proposición 2.1 [59] *Sea A una matriz binaria. Entonces A es una matriz clique de su grafo inducido si y sólo si:*

(i) *A no tiene filas incluidas*

(ii) *A no tiene columnas nulas*

(iii) *Las columnas de A verifican la propiedad de Helly*

Dado un grafo G de n vértices y k cliques, el problema de encontrar $\alpha(G)$ ó $k(G)$ se puede formular como un problema de programación lineal entera de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \alpha(G) = \max \mathbf{1} \cdot x & & k(G) = \min \mathbf{1} \cdot y \\ A_G \cdot x \leq \mathbf{1} & \text{y} & A_G^t \cdot y \geq \mathbf{1} \\ x \in \{0,1\}^n & & y \in \{0,1\}^k \end{array}$$

donde A_G^t es la matriz transpuesta de A_G.

Definición 2.5 Una matriz A es *perfecta* cuando el poliedro $P(A) = \{x \mid Ax \leq \mathbf{1}, x \geq 0\}$ es entero.

Definición 2.6 Una matriz A es *ideal* cuando el poliedro $Q(A) = \{x \mid Ax \geq \mathbf{1}, x \geq 0\}$ es entero.

Observemos que si G es un grafo tal que A_G es perfecta, entonces el problema de hallar $\alpha(G)$ se puede resolver con métodos de programación lineal, y si A_G^t es ideal, lo mismo pasa para el problema de hallar $k(G)$.

Chvátal demostró un resultado más fuerte, que además da una caracterización desde un enfoque distinto para los grafos perfectos.

Teorema 2.3 (Chvátal, 1975) [26] *Sea A una matriz binaria sin columnas nulas. Entonces A es perfecta si y sólo si A sin las filas incluidas es matriz clique de un grafo perfecto.*

2.2 Grafos clique-perfectos

Los grafos clique-perfectos fueron definidos por Guruswami y Pandu Rangan [61] en el año 2000 y todavía no se conocen muchos resultados en este tema. Propiedades sobre transversales de las cliques mínimos y conjuntos independientes de cliques máximos han sido estudiadas en [1, 2, 3, 39]. Recordemos algunas definiciones para un grafo G:

Se denomina transversal de las cliques a un conjunto de vértices de G que interseca a todas las cliques del grafo.

Un conjunto independiente de cliques es un subconjunto de cliques disjuntas dos a dos.

$\tau_C(G)$: tamaño de un transversal de las cliques mínimo en G.

$\alpha_C(G)$: tamaño de un conjunto independiente de cliques de G máximo.

Notemos que para cualquier grafo G, se verifica $\alpha_C(G) \leq \tau_C(G)$.

Definición 2.7 Un grafo G se dice *clique-perfecto* si $\alpha_C(H) = \tau_C(H)$ para todo subgrafo inducido H de G.

Existe también una conjetura sobre una caracterización de los grafos clique perfectos mediante subgrafos prohibidos, planteada originalmente por J. Szwarcfiter [109] y sobre la cual se trabajó en [59].

Sea G un grafo, C un ciclo de G no necesariamente inducido. Decimos que una arista de C es *impropia* si forma triángulo en G con algún vértice de C.

Un r-sol generalizado es un grafo que contiene un ciclo (no necesariamente inducido) C_r de r vértices, con r impar, y por cada arista impropia del mismo, un vértice adyacente únicamente a sus dos extremos.

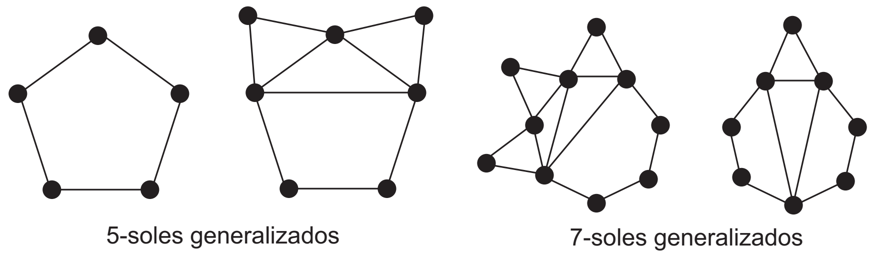


Figura 2.2: Soles generalizados

Conjetura 2.4 [59] *Un grafo es clique-perfecto si y sólo si no contiene un sol generalizado ni el complemento de un agujero impar no múltiplo de 3 como subgrafo inducido.*

Observemos que no todo grafo perfecto es clique-perfecto, el grafo vikingo es perfecto pero no clique-perfecto [59] (figura 2.1).
A su vez, no todo grafo clique-perfecto es perfecto, los complementos de agujeros impares múltiplos de 3 son clique-perfectos pero no perfectos [39]. Sin embargo, vale lo siguiente:

Proposición 2.2 [59] *Si la SPGC es cierta, entonces todo grafo G clique-perfecto y clique-Helly hereditario es perfecto.*

Se han estudiado en la literatura algunas clases de grafos que resultan ser clique-perfectas. Los grafos fuertemente cordales [61], los grafos de comparabilidad [4], y la clase $\mathcal{G}$ [39], la clase de grafos $\{F_4,W_4\}$-free en los cuales todo ciclo impar tiene una cuerda corta.

2.2.1 Parámetros $\alpha_C(G)$ y $\tau_C(G)$

Dado un grafo G de n vértices y k cliques, A_G matriz clique de G, el problema de encontrar $\alpha_C(G)$ ó $\tau_C(G)$ se puede formular como un problema de programación lineal entera de la siguiente manera [39]:

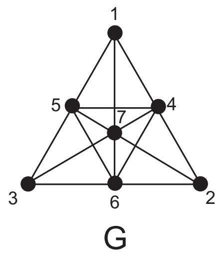
$$\begin{array}{ccc} \alpha_C(G) = \max \mathbf{1} \cdot x & & \tau_C(G) = \min \mathbf{1} \cdot y \\ A_G^t \cdot x \leq \mathbf{1} & \text{y} & A_G \cdot y \geq \mathbf{1} \\ x \in \{0,1\}^k & & y \in \{0,1\}^n \end{array}$$

donde A_G^t es la matriz transpuesta de A_G.

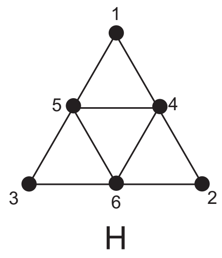
Observemos que si G es un grafo tal que A_G^t es perfecta, entonces el problema de hallar $\alpha_C(G)$ se puede resolver con métodos de programación lineal, y si A_G es ideal, lo mismo pasa para el problema de hallar $\tau_C(G)$.

Observación 2.1 *La clase de grafos clique-perfectos no coincide con la clase de grafos cuya matriz clique transpuesta es perfecta.*

El siguiente grafo tiene matriz clique transpuesta perfecta y no es clique-perfecto.

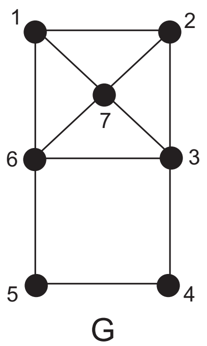


$$A_G^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

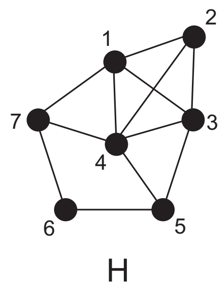


G no es clique-perfecto porque contiene como subgrafo inducido una pirámide H, donde $\alpha_C(H) = 1$ y $\tau_C(H) = 2$. Sin embargo, A_G^t sin sus filas incluidas es la matriz clique de un K_4, que es perfecto. Luego, por el Teorema 2.3, A_G^t es perfecta.

El siguiente grafo es clique-perfecto y no tiene matriz clique transpuesta perfecta.



$$A_G^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



El grafo H inducido por A_G^t sin sus filas incluidas no es perfecto (contiene un C_5 inducido). Luego, por el Teorema 2.3, A_G^t no es perfecta. Sin embargo, es fácil verificar que G es clique-perfecto.

2.3 Grafos coordinados

Los grafos coordinados fueron definidos por M. Groshaus [59] en 2001. Dado un grafo G y un vértice v de G, definimos:

$m_G(v)$: cantidad de cliques de G que contienen a v.

$M(G) = \max\{\ m_G(v) \mid v \in G\}$

$F(G)$: tamaño de una partición mínima de las cliques de G en conjuntos independientes de cliques.

Notemos que para cualquier grafo G, se verifica $M(G) \leq F(G)$.

Definición 2.8 Un grafo G se dice *coordinado* si $M(H) = F(H)$ para todo subgrafo inducido H de G.

En [59] se demuestra que los ciclos pares son coordinados y que los ciclos impares C_{2k+1} con $k \geq 2$ no lo son, ya que $M(C_{2k+1}) = 2$ y $F(C_{2k+1}) = 3$ para $k \geq 2$.

Demostraremos ahora que los complementos de ciclos de longitud mayor ó igual a 5 y distinta de 6 no son coordinados, con lo cual resulta que los grafos coordinados son grafos Berge, y de valer la SPGC son grafos perfectos.

Para eso vamos a calcular $M(\overline{C_n})$ y $|C(\overline{C_n})|$, y ver algunas cuestiones relacionadas con los conjuntos de cliques independientes de $\overline{C_n}$, con lo cual vamos a obtener una cota inferior para $F(\overline{C_n})$ y ver que $F(\overline{C_n}) > M(\overline{C_n})$.

Llamemos A_n a la cantidad de secuencias $[a_1, a_2, \ldots, a_s]$ donde $a_i \in \{2, 3\}$ y $\sum_{i=1}^{s} a_i = n$. Por ejemplo, para $n = 7$, las posibles secuencias son $[2, 2, 3]$, $[2, 3, 2]$ y $[3, 2, 2]$, por lo tanto $A_7 = 3$.

Sea $\overline{C_n}$ el complemento de un ciclo inducido $v_1, v_2, \ldots, v_n$, es decir, v_i es adyacente a v_j sii $j \neq i-1, i+1$ (módulo n), con $n \geq 5$. A partir de ahora, todas las sumas de índices deberán entenderse módulo n.

Observación 2.2 *Dados dos vértices consecutivos v_i, v_{i+1} toda clique de $\overline{C_n}$ contiene a lo sumo uno de ellos.*

Demostración: Dado que una clique es un conjunto completo y en $\overline{C_n}$ v_i y v_{i+1} no son adyacentes, ninguna clique puede contener a ambos vértices. □

Observación 2.3 *Dados tres vértices consecutivos v_i, v_{i+1}, v_{i+2} toda clique de $\overline{C_n}$ contiene por lo menos uno de ellos.*

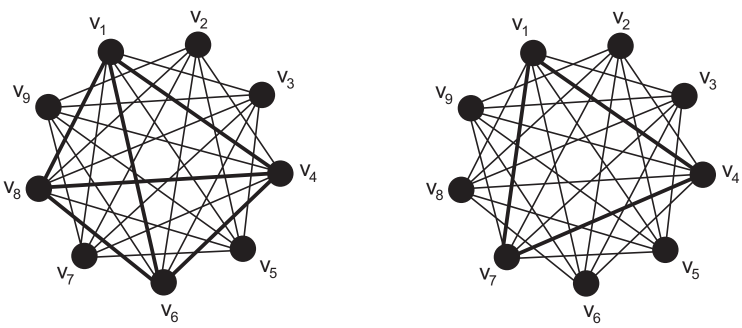
Demostración: Sea S un subgrafo completo de $\overline{C_n}$ que no contiene a v_i, ni a v_{i+1}, ni a v_{i+2}. Como los únicos vértices no adyacentes a v_{i+1} son v_i y v_{i+2}, v_{i+1} es adyacente a todos los vértices de S, luego S no es un subgrafo completo maximal. □

Lema 2.1 *El conjunto de cliques de $\overline{C_n}$ es unión disjunta de $C_{(v_i,v_{i+3})}$, $C(v_{i+1})$ y $C(v_{i+2})$, para cualquier $1 \leq i \leq n$.*

Demostración: Primero veamos que los tres conjuntos son disjuntos dos a dos. $C_{(v_i,v_{i+3})} \cap C(v_{i+1}) = \emptyset$, $C_{(v_i,v_{i+3})} \cap C(v_{i+2}) = \emptyset$ y $C(v_{i+1}) \cap C(v_{i+2}) = \emptyset$ ya que por la Observación 2.2 una clique de $\overline{C_n}$ contiene a lo sumo uno de los dos vértices v_i y v_{i+1}, v_{i+2} y v_{i+3}, y v_{i+1} y v_{i+2}, respectivamente. Ahora veamos que $C(\overline{C_n}) = C(v_{i+1}) \cup C(v_{i+2}) \cup C_{(v_i,v_{i+3})}$. Sea M una clique de $\overline{C_n}$ que no pertenece a $C(v_{i+1}) \cup C(v_{i+2})$, es decir, v_{i+1} y v_{i+2} no pertenecen a M. Por la Observación 2.3, por lo menos uno de los tres vértices v_i, v_{i+1} y v_{i+2} pertenece a M, luego $v_i \in M$, y por lo menos uno de los tres vértices v_{i+1}, v_{i+2} y v_{i+3} pertenece a M, luego $v_{i+3} \in M$, y por lo tanto $M \in C_{(v_i, v_{i+3})}$. $\square$

Lema 2.2 *En $\overline{C_n}$, las cliques de $C(v_i)$ se pueden poner en correspondencia biunívoca con las secuencias $[a_1, a_2, \ldots, a_s]$ donde $a_i \in \{2, 3\}$ y $\sum_{i=1}^{s} a_i = n$, y por lo tanto $|C(v_i)| = A_n$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer $i = 1$, ya que el grafo es totalmente simétrico. Sea $D \in C(v_1)$, $D = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}\}$ con $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_s$. Por la Observación 2.2 debe ser $i_{j+1} - i_j \geq 2$ e $i_s \leq n - 1$ y por la Observación 2.3 debe ser $i_{j+1} - i_j \leq 3$ e $i_s \geq n - 2$. Entonces a la clique D podemos asignarle la secuencia $S(D) = [i_2 - i_1, i_3 - i_2, \ldots, i_n - i_{n-1}, n+1-i_n]$, en la cual, como vimos, cada elemento es 2 ó 3, y su suma es $(i_2 - i_1) + (i_3 - i_2) + \cdots + (i_n - i_{n-1}) + (n+1-i_n) = n+1-i_1 = n$. A su vez, dada una secuencia $S = [a_1, a_2, \ldots, a_s]$ donde $a_i \in \{2, 3\}$ y $\sum_{i=1}^{s} a_i = n$, podemos asignarle el conjunto de vértices $D(S) = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}\}$ donde $i_1 = 1$ e $i_j = i_{j-1} + a_{j-1}$ para $j = 2, \ldots, s$. Veamos que inducen una clique. No hay dos vértices con índices consecutivos, ya que $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_s$, $i_{j+1} - i_j = 2$ ó 3, e $i_s \leq n + 1 - 2 = n - 1$. Luego $D(S)$ es un conjunto de vértices adyacentes dos a dos. Falta ver que es maximal. Sea v_i distinto de $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}$. Entonces, o existe un j tal que $i_j < i < i_{j+1}$, ó $i_s < i \leq n$. En el primer caso, como $i_{j+1} - i_j = 2$ ó 3, resulta que $i = i_{j+1} - 1$ ó $i = i_j + 1$. En el segundo caso, como $i_s \geq n+1-3 = n-2$, resulta que $i = i_s + 1$ ó $i = n$. En cualquier caso, $D(S) \cup \{v_i\}$ no induce un subgrafo completo.
Por último, para ver que la correspondencia es biunívoca basta observar que las asignaciones son inversas una de la otra, es decir, $D(S(D)) = D$ y $S(D(S)) = S$. Por lo tanto, $|C(v_i)| = A_n$. $\square$



$D = \{v_1, v_4, v_6, v_8\} \in C(v_1)$
$S(D) = [3, 2, 2, 2]$

$D = \{v_1, v_4, v_7\} \in C(v_1)$
$S(D) = [3, 3, 3]$

Figura 2.3: Ejemplos de asignación de secuencias a cliques en $\overline{C_9}$

Teorema 2.4 $M(\overline{C_n}) = A_n$.

Demostración: Como para todo $i = 1, \dots, n$ vale $m_{\overline{C_n}}(v_i) = |C(v_i)| = A_n$, entonces $M(\overline{C_n}) = A_n$. □

Lema 2.3 *En $\overline{C_n}$, las cliques de $C_{(v_i, v_{i+3})}$ se pueden poner en correspondencia biunívoca con las secuencias $[a_1, a_2, \dots, a_s]$ donde $a_i \in \{2, 3\}$ y $\sum_{i=1}^{s} a_i = n - 3$, y por lo tanto $|C_{(v_i, v_{i+3})}| = A_{n-3}$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer $i = 1$, ya que el grafo es totalmente simétrico. Consideremos la asignación de secuencias a cliques dada en la demostración del Lema 2.2. Sea $D \in C(v_1)$. Entonces $D \in C_{(v_1, v_4)}$ si y sólo si $a_1 = 3$ en $S(D)$, ya que si $a_1 = 2$, $v_3 \in D$ y por lo tanto $v_4 \notin D$. Luego utilizando la misma asignación, las cliques de $C_{(v_i, v_{i+3})}$ se pueden poner en correspondencia biunívoca con las secuencias $[a_1, a_2, \dots, a_s]$ donde $a_i \in \{2, 3\}$, $a_1 = 3$ y $\sum_{i=1}^{s} a_i = n$, o equivalentemente, las secuencias $[a_1, a_2, \dots, a_t]$ donde $a_i \in \{2, 3\}$ y $\sum_{i=1}^{t} a_i = n - 3$. Por lo tanto, $|C_{(v_i, v_{i+3})}| = A_{n-3}$. □

Teorema 2.5 $|C(\overline{C_n})| = 2A_n + A_{n-3}$.

Demostración: Es consecuencia directa de los Lemas 2.1, 2.2 y 2.3. □

Lema 2.4 *En $\overline{C_n}$, una clique de $C(v_i)$ cuya secuencia correspondiente contiene algún 2, sólo puede formar parte de una familia de cliques independientes de tamaño a lo sumo dos.*

Demostración: Sea D una clique de $C(v_i)$ cuya secuencia correspondiente contiene un 2. Luego D contiene a los vértices v_j y v_{j+2} para algún j. Por la Observación 2.3, cualquier clique de $\overline{C_n}$ contiene por lo menos uno de los vértices v_j, v_{j+1} y v_{j+2}. Luego, cualquier clique de $\overline{C_n}$ independiente con D contiene a v_{j+1}, y por lo tanto dos cliques independientes con D no pueden ser independientes entre si. □

Teorema 2.6 $F(\overline{C_n}) > M(\overline{C_n})$, *para* $n \geq 5, n \neq 6$.

Demostración: Sea $\mathcal{P}$ una partición mínima de las cliques de $\overline{C_n}$ en familias de cliques independientes. Sea D una clique, $v_i \in D$, luego D como clique de $C(v_i)$ se puede representar por una secuencia $[a_1, a_2, \dots, a_s]$ donde $a_i \in \{2, 3\}$ y $\sum_{i=1}^{s} a_i = n$.
Si n no es múltiplo de 3, necesariamente dicha secuencia contiene algún 2. Por lo tanto, por el Lema 2.4, la familia de $\mathcal{P}$ a la cual pertenece D tiene a

lo sumo dos elementos. Dado que D era una clique cualquiera, resulta que toda familia de $\mathcal{P}$ tiene a lo sumo dos cliques. Con lo cual,

$$F(\overline{C_n}) = |\mathcal{P}| \geq \frac{|C(\overline{C_n})|}{2} = \frac{2A_n + A_{n-3}}{2} > A_n = M(\overline{C_n}),$$

ya que $A_{n-3} > 0$ para $n \geq 5$.
Si n es múltiplo de 3, $n = 3t$ con $t \geq 3$, en $\overline{C_n}$ hay exactamente tres cliques que pueden representarse con secuencias de 3: $M_1 = \{v_1, v_4, \ldots, v_{n-2}\}$, $M_2 = \{v_2, v_5, \ldots, v_{n-1}\}$ y $M_3 = \{v_3, v_6, \ldots, v_n\}$. Entonces, en $\mathcal{P}$ puede haber a lo sumo una familia de 3 cliques independientes y el resto de las familias de dos cliques independientes. Con lo cual,

$$F(\overline{C_{3t}}) = |\mathcal{P}| \geq \frac{|C(\overline{C_{3t}})| - 1}{2} = \frac{2A_{3t} + A_{3t-3} - 1}{2} > A_{3t} = M(\overline{C_{3t}}),$$

ya que $A_{3t-3} > 1$ para $t \geq 3$.
Como se ve en la figura 2.4, $M(\overline{C_6}) = F(\overline{C_6}) = 2$. □

Corolario 2.1 *$\overline{C_n}$ no es coordinado para $n \geq 5$, $n \neq 6$.*

Demostración: Es consecuencia directa del Teorema 2.6. □

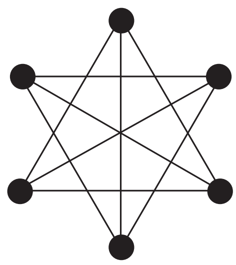


Figura 2.4: $\overline{C_6}$

Corolario 2.2 *Los grafos coordinados son grafos Berge.*

Demostración: Se deduce del Corolario 2.1 y del hecho de que los agujeros impares no son coordinados. □

Como consecuencia de estos resultados y de la SPGC de Berge es natural formular la siguiente conjetura:

Conjetura 2.5 *Los grafos coordinados son perfectos.*

Observemos que el conjunto $\mathcal{S}$ de secuencias $[a_1, a_2, \ldots, a_s]$ donde $a_i \in \{2,3\}$ y $\sum_{i=1}^{s} a_i = n$, $n \geq 5$, se puede partir en dos conjuntos disjuntos, según el primer elemento de la secuencia. Con un razonamiento similar al utilizado en la demostración del Lema 2.3, la cantidad de secuencias de $\mathcal{S}$ cuyo primer elemento es 2 resulta ser A_{n-2} y la cantidad de secuencias de $\mathcal{S}$ cuyo primer elemento es 3 resulta ser A_{n-3}. Por lo tanto la sucesión $\{A_n\}_{n\geq 2}$ puede calcularse en forma recursiva de la siguiente manera:

$$\begin{cases} A_2 = 1 \\ A_3 = 1 \\ A_4 = 1 \\ A_n = A_{n-2} + A_{n-3}, \; n \geq 5 \end{cases}$$

La fórmula cerrada para los términos de esta sucesión es de la forma

$$A_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + c_3\lambda_3^n$$

donde c_1, c_2 y c_3 son números complejos y λ_1, λ_2 y λ_3 son las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - x - 1$ [103].
El polinomio p tiene una sola raíz real λ_1, que verifica $1,3 < \lambda_1 < 1,4$ y dos raíces complejas conjugadas λ_2 y λ_3 de módulo $\frac{1}{\lambda_1} < 1$. Por lo tanto, para valores de n suficientemente grandes, $A_n \cong c_1\lambda_1^n$, y dado que A_n es real y λ_1 es real y mayor a 1, c_1 debe ser real también.

De la demostración del Teorema 2.6 se desprende que

$$F(\overline{C_n}) - M(\overline{C_n}) \geq \frac{A_{n-3} - 1}{2},$$

y dado que la sucesión $\{A_n\}_{n\geq 0}$ crece exponencialmente, la familia de grafos $\{\overline{C_n}\}_{n\geq 7}$ resulta ser una familia de grafos altamente no coordinados (la diferencia entre $F(G)$ y $M(G)$ puede ser arbitrariamente grande).
En ese sentido, esta familia es similar a la familia de grafos altamente imperfectos de Mycielski [89] y a la familia de grafos altamente clique-imperfectos presentada en [39], donde la diferencia entre $\chi(G)$ y $\omega(G)$, y entre $\tau_C(G)$ y $\alpha_C(G)$ respectivamente, puede ser arbitrariamente grande.

Otra clase de grafos que no son coordinados son los soles completos impares, es fácil ver que $M((2k+1)\text{-}sol) = 3$ y $F((2k+1)\text{-}sol) = 4$.

En el Capítulo 4 de esta tesis presentamos una nueva clase de grafos, los grafos balanceados, que resultan ser coordinados, y de lo cual se desprende por ejemplo que subclases de los balanceados como los grafos bipartitos, los fuertemente cordales, los trivialmente perfectos y los totalmente unimodulares son coordinados.

2.4 Grafos K-perfectos

Los grafos de intersección han jugado un rol importante en la teoría de grafos desde hace más de sesenta años.

Los grafos clique constituyen una clase de grafos de intersección que ha sido estudiada no sólo dentro de ese contexto sino también dentro de la teoría de operadores de grafos [95].
Muchos resultados pueden obtenerse analizando el grafo clique de un grafo, algunos de éstos pueden encontrarse en [86] y [95].
Recordemos algunas definiciones:

Sea S una familia finita de subconjuntos no vacíos de un conjunto dado. El grafo intersección de S se obtiene representando cada subconjunto por un vértice, donde dos vértices son adyacentes si los subconjuntos correspondientes se intersecan.

Decimos que S satisface la propiedad de Helly cuando toda subfamilia de S consistente en subconjuntos que se intersecan de a pares tiene intersección no vacía.

El grafo clique $K(G)$ de un grafo G es el grafo intersección de la familia de cliques de G.

Definición 2.9 [59] Decimos que G es K-perfecto cuando su grafo clique $K(G)$ es perfecto.

Observación 2.4 *Por definición, la clase de los grafos K-perfectos es la clase* $K^{-1}(perfectos)$.

Un grafo es clique-Helly (CH) si sus cliques satisfacen la propiedad de Helly.

Un grafo G es clique-Helly hereditario (CHH) si todo subgrafo inducido de G es clique-Helly.

Prisner da en [97] una caracterización de los grafos clique-Helly hereditarios en términos de subgrafos prohibidos, que además conduce a un algoritmo de reconocimiento polinomial de los mismos.

Teorema 2.7 (Prisner, 1991) [97] *Un grafo es clique-Helly hereditario si y sólo si no contiene como subgrafo inducido a ninguno de los grafos de la figura 2.5.*

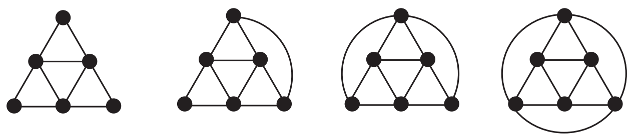
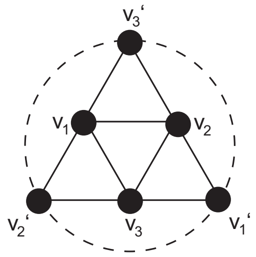


Figura 2.5: Grafos de Hajos

También podemos dar una caracterización de los grafos clique-Helly hereditarios basada en propiedades de su matriz clique.

Teorema 2.8 *Un grafo es clique-Helly hereditario si y sólo si su matriz clique no contiene como submatriz la matriz de incidencia de un triángulo.*

Demostración:
$\Leftarrow$) Supongamos que G no es clique-Helly hereditario. Entonces, por el Teorema 2.7, G contiene un subgrafo inducido H isomorfo a alguno de los grafos de la figura 2.5.



H

En G, v_1', v_2 y v_3 pertenecen a una clique M_1, v_1, v_2' y v_3 pertenecen a una clique M_2 y v_1, v_2 y v_3' pertenecen a una clique M_3. Para $i = 1, 2, 3$ $v_i \notin M_i$. Por lo tanto, tomando las filas de A_G correspondientes a M_1, M_2, M_3 y las columnas de A_G correspondientes a v_1, v_2, v_3, tenemos la matriz de incidencia de un triángulo como submatriz de A_G.

$\Rightarrow$) Supongamos que A_G tiene la siguiente submatriz, donde M_1, M_2, M_3 son cliques de G y v_1, v_2, v_3 son vértices de G:

	v_1	v_2	v_3
M_1	0	1	1
M_2	1	0	1
M_3	1	1	0

v_1, v_2 y v_3 inducen un triángulo en G, y M_1, M_2, M_3 son cliques de G tales que v_i no pertenece a M_i. Si todo vértice de M_i fuera adyacente a v_i, entonces M_i no sería un subgrafo completo maximal de G. Luego para cada $i = 1, 2, 3$ existe un vértice $v_i' \in M_i$ que no es adyacente a v_i. El subgrafo de G inducido por $v_1, v_2, v_3, v_1', v_2', v_3'$ es isomorfo a alguno de los grafos de la figura 2.5, y por el Teorema 2.7, G no es clique-Helly hereditario. $\square$

Existe una relación entre la matriz clique de un grafo clique-Helly G y la matriz clique de $K(G)$.

Teorema 2.9 [59] *Sea G un grafo y A_G matriz clique de G. Entonces el grafo inducido por A_G^t es $K(G)$, y si G es clique-Helly vale:*

(i) *$A_{K(G)}$ se obtiene a partir de A_G^t eliminando las filas incluidas.*

(ii) *Los poliedros $P(A_{K(G)})$ y $P(A_G^t)$ coinciden.*

A partir el teorema de Chvátal (Teorema 2.3) sobre grafos perfectos y matrices perfectas, y utilizando el Teorema 2.9, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.3 *Sea G un grafo y A_G matriz clique de G, entonces A_G^t es perfecta si y sólo si G es clique-Helly y K-perfecto.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Supongamos que A_G^t es perfecta. Entonces, por el Teorema 2.3, A_G^t sin las filas incluidas (llamémosla A) es matriz clique de un grafo perfecto. Por la Proposición 2.1, las columnas de A verifican la propiedad de Helly. Como la diferencia entre A_G^t y A son las filas incluidas, un conjunto de columnas tiene intersección no vacía en A si y sólo si tiene intersección no vacía en A_G^t. Por lo tanto las columnas de A_G^t, que son las filas de A_G, verifican la propiedad de Helly. Con lo cual G es clique-Helly. Entonces, por el Teorema 2.9, A es $A_{K(G)}$, luego $K(G)$ es perfecto. Entonces G resulta clique-Helly y K-perfecto.

$\Leftarrow$) Supongamos que G es clique-Helly y K-perfecto. Entonces, por el Teorema 2.9, A_G^t sin las filas incluidas es la matriz clique de $K(G)$, que es un grafo perfecto. Y por el Teorema 2.3, A_G^t resulta ser una matriz perfecta. $\square$

2.4.1 Relaciones entre los parámetros

Dado que los parámetros M, F, α_C y τ_C se refieren a las cliques del grafo y los parámetros χ, ω, α y k tienen que ver con propiedades de los vértices del grafo, resulta natural plantearse la relación que puede haber entre el primer grupo de parámetros mirados en un grafo G y el segundo grupo de parámetros mirados en su grafo clique K(G).
En efecto, valen las siguientes relaciones:

Proposición 2.3 [59] *Sea G un grafo:*

(i) $F(G) = \chi(K(G))$

(ii) $M(G) \leq \omega(K(G))$

(iii) *Si G es clique-Helly entonces $M(G) = \omega(K(G))$*

Proposición 2.4 [59] *Sea G un grafo:*

(i) $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$

(ii) $\tau_C(G) \geq k(K(G))$

(iii) *Si G es clique-Helly entonces $\tau_C(G) = k(K(G))$*

A partir de estas propiedades, se podría pensar que los grafos coordinados, clique-perfectos y K-perfectos coinciden, al menos dentro de la clase de grafos clique-Helly.

Pero veamos el siguiente ejemplo:

Sea G un grafo cualquiera y consideramos el grafo G^+ que se obtiene agregándole a G un vértice v universal.

El conjunto de cliques de G^+ es $C(G^+) = \{M \cup \{v\} \mid M \in C(G)\}$.
G^+ resulta ser clique-Helly, ya que la familia de todas las cliques de G^+ tiene intersección no vacía (v pertenece a esa intersección).
Además, dado que todo par de cliques de G^+ se intersecan en v, $K(G^+)$ es un grafo completo y todo grafo completo es perfecto, con lo cual G^+ resulta ser K-perfecto.

Si bien $M(G^+) = F(G^+) = |C(G)|$ y $\alpha_C(G^+) = \tau_C(G^+) = 1$, las igualdades no tienen porqué valer para los subgrafos inducidos. En particular, G es un subgrafo inducido de G^+, y habíamos dicho que G era un grafo cualquiera.

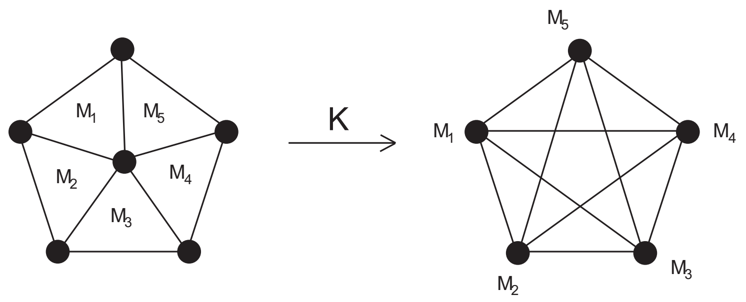


Figura 2.6: Ejemplo de un grafo clique-Helly hereditario y K-perfecto que no es clique-perfecto ni coordinado.

Si por ejemplo tomamos $G = C_5$, resulta $G^+ = W_5$ (figura 2.6). W_5 es clique-Helly, más aún, clique-Helly hereditario y K-perfecto. Sin embargo no es clique-perfecto ni coordinado porque contiene como subgrafo inducido a C_5. Con lo cual, vale que

$$\text{clique-Helly hereditario y K-perfecto} \not\Rightarrow \text{clique-perfecto o coordinado.}$$

A su vez, consideremos este otro ejemplo:

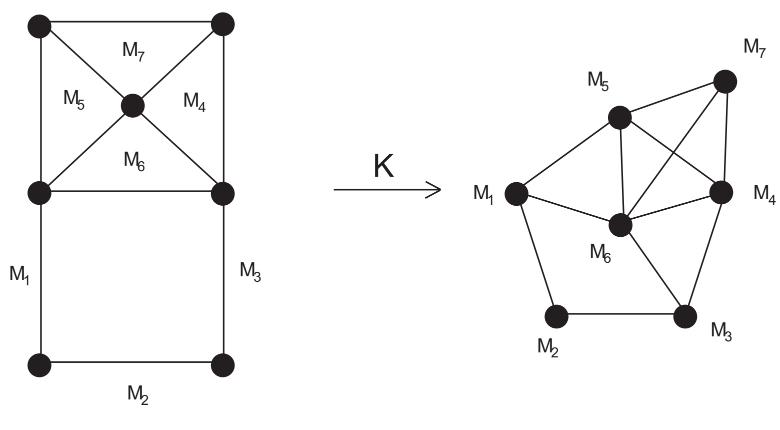


Figura 2.7: Ejemplo de un grafo clique-Helly hereditario, clique-perfecto y coordinado cuyo grafo clique no es perfecto.

El grafo de la figura 2.7 es clique-Helly hereditario, clique-perfecto y coordinado. Sin embargo, su grafo clique no es perfecto ya que contiene como subgrafo inducido a C_5. Con lo cual, vale que

clique-Helly hereditario, clique-perfecto y coordinado $\not\Rightarrow$ K-perfecto.

2.4.2 Grafos clique-perfectos$_c$ y coordinados$_c$

Como podemos ver en los ejemplos anteriores, imponer condiciones a los subgrafos inducidos de G no es suficiente para obtener resultados que valgan en los subgrafos inducidos de $K(G)$, e imponer condiciones a los subgrafos inducidos de $K(G)$ no es suficiente para obtener resultados que valgan en los subgrafos inducidos de G.
Esto es bastante lógico, ya que si observamos la figura 2.7, podemos ver que C_5 es un subgrafo inducido de $K(G)$, pero en el grafo G no hay ningún subgrafo inducido cuyo grafo clique sea C_5. A su vez, observando la figura 2.6, podemos ver que C_5 es un subgrafo inducido de G, pero no existe en $K(G)$ ningún subgrafo inducido isomorfo a $K(C_5)$.

La búsqueda de condiciones necesarias y suficientes sobre un grafo G para que $K(G)$ sea perfecto, y en particular la búsqueda de subgrafos de G cuyos grafos clique sean subgrafos inducidos de $K(G)$, dio origen a una nueva definición de subgrafos, los subgrafos clique, y a dos nuevas variantes de grafos, los clique-perfectos$_c$ y los coordinados$_c$.

Sea G un grafo y sean $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ las cliques de G. Dado un subconjunto $\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$, notaremos $G_{i_1,\ldots,i_s}$ al subgrafo de G formado por los vértices y las aristas que aparecen en $M_{i_1}, \ldots, M_{i_s}$.

Definición 2.10 $G_{i_1,\ldots,i_s}$ es un *subgrafo clique* de G si y sólo si toda clique de $G_{i_1,\ldots,i_s}$ es una clique de G.

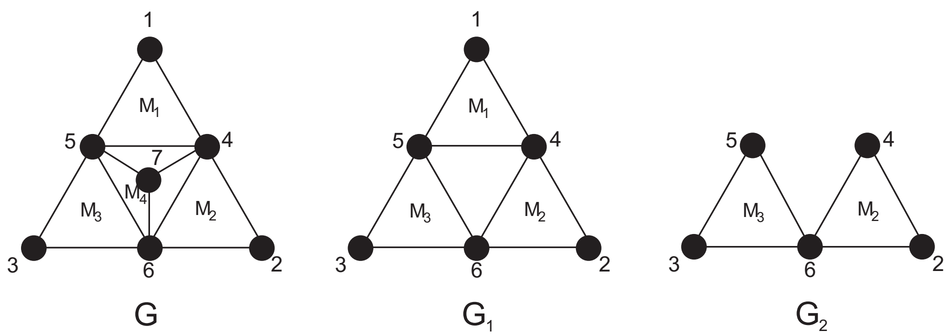


Figura 2.8: Ejemplos de subgrafos

En la figura 2.8 podemos observar que no todo subconjunto de cliques forman un subgrafo clique ni todo subgrafo inducido es un subgrafo clique (G_1) y no todo subgrafo clique es inducido (G_2). Mas aún, vale lo siguiente:

Teorema 2.10 [59] *Sea G un grafo. Entonces todos sus subgrafos clique son inducidos si y sólo si G es $\{P_4, C_4\}$-free.*

De los Teoremas 2.2 y 2.10, se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2.4 *Sea G un grafo. Entonces todos sus subgrafos clique son inducidos si y sólo si G es trivialmente perfecto.*

Definición 2.11 [59] G se dice *clical* si para todo subconjunto $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, las cliques de $G_{i_1,\ldots,i_s}$ son exactamente $M_{i_1}, \ldots, M_{i_s}$.

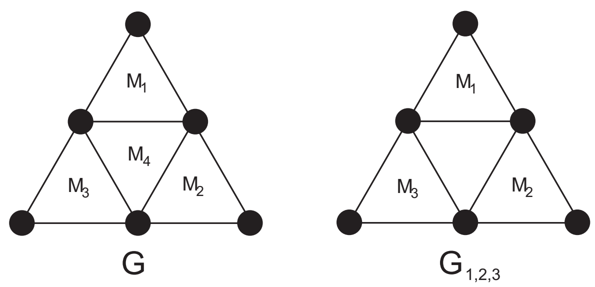


Figura 2.9: Grafo no clical

No todo grafo es clical. Por ejemplo en la pirámide, el subgrafo clique $G_{1,2,3}$ contiene también a M_4 como clique (figura 2.9).

Teorema 2.11 [59] *G es clical si y sólo si no contiene como subgrafo inducido a ninguno de los grafos de la figura 2.5.*

Por el Teorema 2.7, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.5 *G es clical $\Leftrightarrow$ G es clique-Helly hereditario.*

Definición 2.12 Una propiedad en grafos es *clique-hereditaria* cuando se verifica que si un grafo tiene la propiedad, cualquier subgrafo clique de él también la tiene.

Observación 2.5 *De esta equivalencia resulta que la propiedad clical es hereditaria, y como la propiedad clical es claramente clique-hereditaria, resulta también que la propiedad CHH es clique-hereditaria.*

Con respecto a los subgrafos clique, tenemos la siguiente propiedad:

Proposición 2.5 [59] *Sea G un grafo,*

(i) *H es subgrafo clique de $G \Rightarrow K(H)$ es subgrafo inducido de $K(G)$.*

(ii) *Si G es clique-Helly hereditario, entonces todo subgrafo inducido de $K(G)$ es el grafo clique de algún subgrafo clique de G.*

Definición 2.13 Un grafo G se dice *coordinado*$_c$ si $M(H) = F(H)$ para todo subgrafo clique H de G.

Definición 2.14 Un grafo G se dice *clique-perfecto*$_c$ si $\alpha_C(H) = \tau_C(H)$ para todo subgrafo clique H de G.

Ahora sí, tenemos los siguientes resultados:

Teorema 2.12 [59] *Si G es K-perfecto y clique-Helly entonces es coordinado$_c$ y clique-perfecto$_c$.*

Teorema 2.13 [59] *Sea G un grafo clique-Helly hereditario. Entonces, son equivalentes:*

(i) *G es clique-perfecto$_c$*

(ii) *G es coordinado$_c$*

(iii) *$M(H)\alpha_C(H) \geq |C(H)|$ para todo subgrafo clique H de G*

(iv) *G es K-perfecto*

(v) *A_G^t es una matriz perfecta*

2.5 Grafos clique de grafos perfectos

Uno de los problemas abiertos más notorios en el campo de la teoría de grafos es la complejidad computacional del reconocimiento de los grafos clique. Hamelink dio una caracterización parcial de los grafos clique en 1968, demostrando que todo grafo clique-Helly es grafo clique de algún grafo. Para ésto, realizó la siguiente construcción:

Definición 2.15 Definimos el grafo $H(G)$ donde $V(H(G)) = \{q_1, q_2, \ldots, q_k, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, cada q_i corresponde a la clique M_i de G y cada w_i corresponde al vértice v_i de G. Las aristas de $H(G)$ son las siguientes: los vértices $q_1, q_2, \ldots, q_k$ inducen el grafo $K(G)$, los vertices $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son un conjunto independiente y w_j es adyacente a q_i si y sólo si v_j pertenece a la clique M_i en G.

Teorema 2.14 (Hamelink, 1968) [68] *Sea G un grafo clique-Helly y $H(G)$ como en la definición anterior. Entonces las cliques de $H(G)$ son $N[w_i]$ para cada i, los w_i son vértices uniclicales de $H(G)$ y $K(H(G)) = G$.*

A su vez dio una condición suficiente para que un grafo no sea grafo clique:

Teorema 2.15 (Hamelink, 1968) [68] *Un grafo H que contenga una clique T de 3 vértices $\{x, y, z\}$ y otras 3 cliques A, B y C tales que $T \cap A = \{x, y\}$, $T \cap B = \{y, z\}$ y $T \cap C = \{x, z\}$, no es el grafo clique de ningún grafo.*

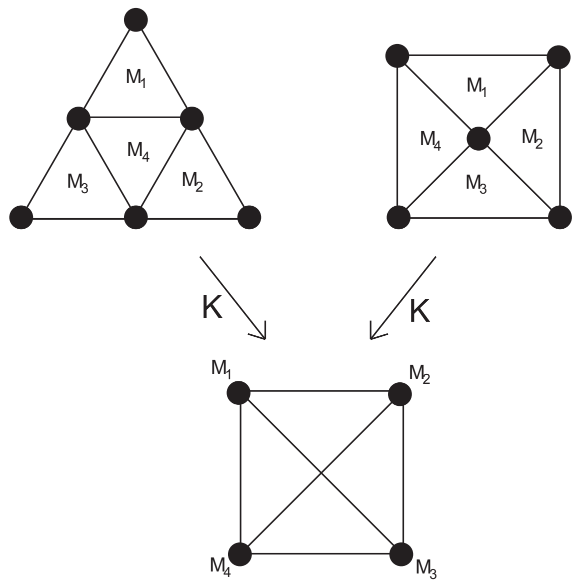


Figura 2.10: Grafos clique

Por ejemplo, de este teorema se desprende que ninguno de los grafos de la figura 2.5 es grafo clique. Y por lo tanto si para un grafo G se tiene que todo subgrafo inducido de $K(G)$ es grafo clique de algún subgrafo de G, necesariamente $K(G)$ es clique-Helly hereditario.

Grafos distintos pueden tener el mismo grafo clique (figura 2.10), con lo cual resulta que el operador K no es inyectivo ni sobreyectivo.

Roberts y Spencer en 1971 [102] extendieron la caracterización de Hamelink a una caracterización completa.

Teorema 2.16 (Roberts y Spencer, 1971) [102] *Un grafo H es grafo clique si y sólo si existe una familia de subgrafos completos de H que satisface la propiedad de Helly y cubre todas las aristas de H.*

Sin embargo, ningún algoritmo eficiente ha podido ser formulado en función de esa caracterización.

Los grafos clique de varias clases de grafos ya fueron caracterizados. Algunas de esas clases son los árboles [70], los grafos de intervalos [71], los grafos cordales [15] y los grafos arco-circulares Helly [38]. No se conoce una caracterización para los grafos clique de los grafos perfectos.

Dadas dos clases de grafos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$, decimos que $K(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$ si para todo grafo $G \in \mathcal{L}$, vale que $K(G) \in \mathcal{H}$ y para todo grafo $F \in \mathcal{H}$ existe un grafo $G \in \mathcal{L}$ tal que $K(G) = F$.

Decimos que una clase $\mathcal{H}$ es *fija* bajo el operador K cuando $K(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, y decimos que dos clases $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son *clique-duales* cuando $K(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$ y $K(\mathcal{H}) = \mathcal{L}$.

Varias clases de grafos resultan ser fijas bajo el operador K, entre ellas los grafos clique-Helly [42], los grafos clique-Helly hereditarios [97], los grafos disk-Helly [6], los grafos fuertemente cordales [6], los grafos de Ptolomeo [6], los grafos de bloque [6] y los grafos sin diamantes [24].

También hay varios pares de clases clique-duales conocidos, en [80] se demuesta que los grafos circulares Helly tienen una clase dual (los grafos dualmente circulares Helly) y que ambas clases son distintas.

A continuación vamos a probar que las clases de grafos perfectos $\cap$ clique-Helly y K-perfectos $\cap$ clique-Helly son clique-duales y distintas, y las clases perfectos $\cap$ CHH y K-perfectos $\cap$ CHH son clique-duales y distintas.

También vamos a caracterizar la clase clique de los grafos trivialmente perfectos, que resultan ser los grafos P_3-free, o equivalentemente, aquellos grafos cuyas componentes conexas son grafos completos.

Veamos primero algunas propiedades del grafo $H(G)$ construido por Hamelink. Existe una relación entre la matriz clique de un grafo clique-Helly G y la matriz clique de $H(G)$.

Teorema 2.17 *Sea G un grafo clique-Helly de n vértices. Entonces la matriz clique de $H(G)$ es $A_{H(G)} = A_G^t \mid I_n$, es decir, la matriz transpuesta de A_G pegada a una matriz identidad de $n \times n$.*

Demostración: Sea G un grafo de vértices $v_1, \ldots, v_n$ y cliques $M_1, \ldots, M_k$ con matriz clique A_G. Observemos que cada columna i de A_G correspondiente a un vértice v_i de G es el vector característico de $C_G(v_i)$ (tiene 1's en las filas correspondientes a las cliques de G a las cuales pertenece v_i).
Por el Teorema 2.15 las cliques de $H(G)$ son $N_{H(G)}[w_i] = \{q_j | M_j \in C_G(v_i)\} \cup \{w_i\}$, y por lo tanto $A_{H(G)} = A_G^t \mid I_n$, donde cada fila i corresponde a la clique $N_{H(G)}[w_i]$, las primeras k columnas (filas de A_G) corresponden a los vértices $q_1, \ldots, q_k$ de $H(G)$ y las n columnas restantes (de la matriz identidad) corresponden a los vértices uniclicales $w_1, \ldots, w_n$. $\square$

Podemos también pensar a H como un operador que transforma un grafo en otro grafo, y vale lo siguiente:

Teorema 2.18 *H es un operador inyectivo de CH en CH, que ademas manda CHH en CHH y $CH \setminus CHH$ en $CH \setminus CHH$.*

Demostración: Primero veamos que H es inyectivo de CH en la clase de los grafos. Supongamos que $H(G_1) = H(G_2)$, con G_1 y G_2 grafos clique-Helly. Entonces, por el Teorema 2.15, $G_1 = K(H(G_1)) = K(H(G_2)) = G_2$.

Veamos ahora que si G es clique-Helly entonces $H(G)$ también. Si G es clique-Helly, por el Teorema 2.17 la matriz clique $A_{H(G)} = A_G^t \mid I_n$. Observemos que una familia de filas $\{i_1, \ldots, i_s\}$ de $A_{H(G)}$ tiene intersección no vacía si y sólo si la familia de columnas $\{i_1, \ldots, i_s\}$ de A_G tiene intersección no vacía (dos filas de $A_{H(G)}$ no pueden intersecarse en la parte correspondiente a la matriz identidad). Entonces las filas de $A_{H(G)}$ verifican la propiedad de Helly si y sólo si las columnas de A_G verifican la propiedad de Helly, y ésto es verdadero por el Teorema 2.1.

Sea G un grafo clique-Helly hereditario. Por el Teorema 2.17 la matriz clique $A_{H(G)} = A_G^t \mid I_n$. Supongamos que $A_{H(G)}$ contiene como submatriz la matriz de incidencia de un triángulo, llamémosla B. Como B tiene dos 1's por columna, resulta que B debe ser submatriz de A_G^t, y por lo tanto B^t es submatriz de A_G. Pero B^t también es matriz de incidencia de un triángulo, luego por el Teorema 2.8 G no es clique-Helly hereditario, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto $A_{H(G)}$ no contiene como submatriz la matriz de incidencia de un triángulo y nuevamente por el Teorema 2.8 $H(G)$ es clique-Helly hereditario.

Supongamos ahora que $G \in CH \setminus CHH$. Entonces A_G contiene como submatriz la matriz de incidencia de un triángulo y por lo tanto A_G^t (y en consecuencia $A_{H(G)}$) contiene como submatriz la matriz de incidencia de un triángulo, luego $H(G)$ no es clique-Helly hereditario, sin embargo es clique-Helly por lo demostrado anteriormente. □

Observación 2.6 *Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$ son clases de grafos clique-Helly tales que:*

(i) $G \in \mathcal{H} \Rightarrow K(G) \in \mathcal{L}$

(ii) $F \in \mathcal{L} \Rightarrow H(F) \in \mathcal{H}$

entonces $K(\mathcal{H}) = \mathcal{L}$.

Teorema 2.19 (Escalante, 1973) [42] *Si G es un grafo clique-Helly, entonces $K^2(G)$ es un subgrafo inducido de G.*

Corolario 2.6 *Si G es un grafo clique-Helly y perfecto, entonces $K^2(G)$ es perfecto.*

Demostración: Por el Teorema 2.19, $K^2(G)$ es un subgrafo inducido de G. Entonces todo subgrafo inducido H de $K^2(G)$ es un subgrafo inducido de G y como G es perfecto, $\omega(H) = \chi(H)$. Por lo tanto $K^2(G)$ es perfecto. □

Juntando este resultado con que las clases de grafos clique-Helly y CHH son fijas bajo el operador K, obtenemos los siguientes resultados:

Teorema 2.20 [59] *Si G es un grafo perfecto y clique-Helly, entonces $K(G)$ es K-perfecto y clique-Helly.*

Corolario 2.7 [59] *Sea G un grafo perfecto y clique-Helly, entonces $K(G)$ es clique-perfecto$_c$ y coordinado$_c$.*

Teorema 2.21 [59] *Si G es un grafo perfecto y clique-Helly hereditario, entonces $K(G)$ es K-perfecto y clique-Helly hereditario.*

Lema 2.5 *Sea G un grafo y v un vértice de G tal que $N[v]$ induce un subgrafo completo en G. Entonces G es perfecto si y sólo si $G - \{v\}$ lo es.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Todo subgrafo inducido H de $G - \{v\}$ es un subgrafo inducido de G y como G es perfecto, $\omega(H) = \chi(H)$. Por lo tanto $G - \{v\}$ es perfecto.

$\Leftarrow$) Sea G un grafo de n vértices tal que $G - \{v\}$ es perfecto. Sea H un subgrafo inducido de G. Si v no pertenece a H, entonces H es un subgrafo inducido de $G-\{v\}$ y por lo tanto $\omega(H) = \chi(H)$. Si v pertenece a H, $H-\{v\}$ es un subgrafo inducido de $G-\{v\}$ y por lo tanto $\omega(H-\{v\}) = \chi(H-\{v\})$. La vecindad de v en H es un completo, luego $|N(v)| \leq \omega(H - \{v\})$. Veamos los dos casos posibles:

- Si $|N(v)| < \omega(H - \{v\})$, entonces $\omega(H) = \omega(H - \{v\})$ y un coloreo óptimo de $H - \{v\}$ puede extenderse a un coloreo de H con igual cantidad de colores, ya que como $|N(v)| < \chi(H - \{v\})$, es posible colorear v con alguno de los $\chi(H - \{v\})$ colores. Por lo tanto $\chi(H) = \chi(H - \{v\}) = \omega(H - \{v\}) = \omega(H)$.

- Si $|N(v)| = \omega(H-\{v\})$, entonces $\omega(H) = \omega(H-\{v\})+1$ y un coloreo óptimo de $H - \{v\}$ puede extenderse a un coloreo de H eligiendo un nuevo color para v, y por lo tanto $\chi(H) = \chi(H - \{v\}) + 1 = \omega(H - \{v\}) + 1 = \omega(H)$.

Luego G es perfecto. □

Teorema 2.22 *Sea G un grafo. Entonces G es K-perfecto si y sólo si $H(G)$ es perfecto.*

Demostración: Sea G un grafo y $G_0 = H(G)$ como en la definición 2.15. Definimos $G_1 = G_0 - \{w_1\}$, $G_2 = G_1 - \{w_2\}$, $\ldots$, $G_n = G_{n-1} - \{w_n\} = K(G)$. Observemos que para todo $1 \leq i \leq n$, $N[w_i]$ es completo en G_{i-1}. Por definición $N(w_i)$ es el conjunto de vértices correspondientes a las cliques de G que contienen a w_i. Estas cliques se intersecan dos a dos en G (v_i pertenece a todas ellas) y por lo tanto inducen un subgrafo completo en $K(G)$. Entonces, por definición de $H(G)$, $N[w_i]$ es completo en $H(G)$ y en consecuencia, también en G_{i-1}.
Ahora, aplicando n veces el Lema 2.5, $H(G) = G_0$ es perfecto $\Leftrightarrow$ G_1 es perfecto $\Leftrightarrow$ G_2 es perfecto $\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow G_n = K(G)$ es perfecto. □

Combinando los teoremas anteriores obtenemos como corolario la dualidad entre las clases de grafos perfectos y K-perfectos dentro de los grafos clique-Helly y CHH.

Corolario 2.8 *Las clases* perfectos $\cap$ clique-Helly *y* K-perfectos $\cap$ clique-Helly *son clique-duales.*

Demostración: Sea $\mathcal{H}$=perfectos $\cap$ clique-Helly y $\mathcal{L}$=K-perfectos $\cap$ clique-Helly. Por el Teorema 2.20, $G \in \mathcal{H} \Rightarrow K(G) \in \mathcal{L}$. Por los Teoremas 2.22 y 2.18, $F \in \mathcal{L} \Rightarrow H(F) \in \mathcal{H}$. Por último, por la observación 2.6 tenemos que $K(\mathcal{H}) = \mathcal{L}$.
Por definición de grafo K-perfecto y dado que la clase clique-Helly es fija, $G \in \mathcal{L} \Rightarrow K(G) \in \mathcal{H}$. Por el Teorema 2.18, si $F \in \mathcal{H}$ entonces $H(F)$ es clique-Helly, y como $K(H(F)) = F$ que es perfecto, resulta que F es K-perfecto. Luego $F \in \mathcal{H} \Rightarrow H(F) \in \mathcal{L}$. Por último, por la observación 2.6 tenemos que $K(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$. $\square$

Corolario 2.9 *Las clases* perfectos $\cap$ CHH *y* K-perfectos $\cap$ CHH *son clique-duales.*

Demostración: Sea $\mathcal{H}$=perfectos $\cap$ CHH y $\mathcal{L}$=K-perfectos $\cap$ CHH. Por el Teorema 2.21, $G \in \mathcal{H} \Rightarrow K(G) \in \mathcal{L}$. Por los Teoremas 2.22 y 2.18, $F \in \mathcal{L} \Rightarrow H(F) \in \mathcal{H}$. Por último, por la observación 2.6 tenemos que $K(\mathcal{H}) = \mathcal{L}$.
Por definición de grafo K-perfecto y dado que la clase CHH es fija, $G \in \mathcal{L} \Rightarrow K(G) \in \mathcal{H}$. Por el Teorema 2.18, si $F \in \mathcal{H}$ entonces $H(F)$ es CHH, y como $K(H(F)) = F$ que es perfecto, resulta que F es K-perfecto. Luego $F \in \mathcal{H} \Rightarrow H(F) \in \mathcal{L}$. Por último, por la observación 2.6 tenemos que $K(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$. $\square$

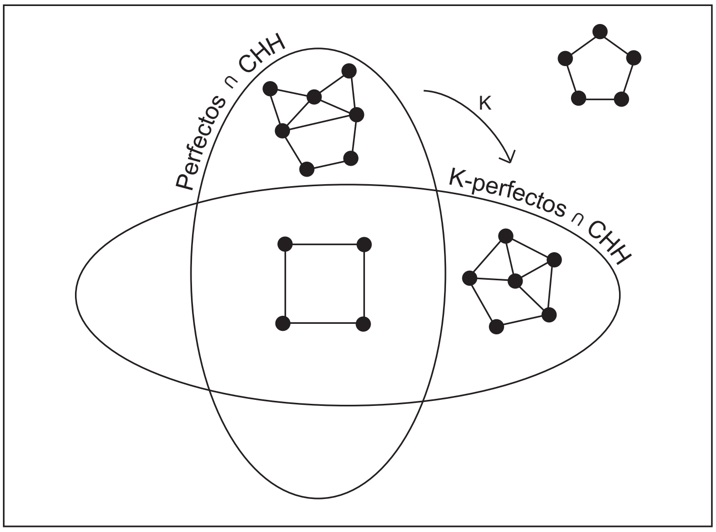


Figura 2.11: Como se ve en la figura, las clases son distintas.

De las clases de grafos que estudiamos hasta ahora, sólo faltan analizar los grafos clique de los grafos trivialmente perfectos (que por el Teorema 2.2

son equivalentes a los grafos $\{P_4, C_4\}$-free). Estos resultan ser los grafos P_3-free, o equivalentemente, los grafos cuyas componentes conexas son grafos completos (al no haber vértices a distancia 2, dados dos vértices, o son adyacentes o no existe un camino entre ellos), o equivalentemente, los grafos tales que para todo subgrafo inducido H vale $\alpha_C(H) = |C(H)|$.

Teorema 2.23 *$K(\{P_4, C_4\}$-free) $= P_3$-free $\subset \{P_4, C_4\}$-free.*

Demostración: Sea G un grafo $\{P_4, C_4\}$-free. Supongamos que en G hay tres cliques M_1, M_2 y M_3 que inducen un P_3 en $K(G)$, es decir, $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, $M_2 \cap M_3 \neq \emptyset$ y $M_3 \cap M_1 = \emptyset$. Sean $v_2 \in M_1 \cap M_2$ y $v_3 \in M_2 \cap M_3$. Como $M_3 \cap M_1 = \emptyset$, $v_2 \notin M_3$ y $v_3 \notin M_1$. Luego debe existir $v_4 \in M_3$ no adyacente a v_2 y $v_1 \in M_1$ no adyacente a v_3. v_1, v_2, v_3 y v_4 inducen un C_4 o un P_4 en G según v_1 y v_4 sean o no adyacentes, lo que contradice la hipótesis. Luego $K(G)$ es P_3-free.
Sea G un grafo P_3-free, formado por $M_1, M_2, \ldots, M_k$, donde M_i es un completo de n_i vértices. Claramente, G es clique-Helly dado que todas sus cliques están aisladas. $H(G)$ es el grafo formado por $E_1, E_2, \ldots, E_k$ donde E_i es una estrella de $n_i + 1$ vértices. Luego $H(G)$ es $\{P_4, C_4\}$-free.
Por la observación 2.6, $K(\{P_4, C_4\}$-free) $= P_3$-free.
Por último, dado que tanto P_4 como C_4 tienen a P_3 como subgrafo inducido, es claro que un grafo P_3-free es $\{P_4, C_4\}$-free. □

Corolario 2.10 *Si G es trivialmente perfecto y conexo, entonces $K^2(G)$ es trivial.*

Demostración: Es fácil ver que el grafo clique de un grafo conexo es conexo. Sean M y M' dos cliques de G conexo. Sean $v \in M$ y $v' \in M'$, $e_1, e_2, \ldots, e_s$ las aristas de un camino de v a v' en G. Cada e_i está al menos en una clique M_i de G, y $M_i = M_{i+1}$ ó $M_i \cap M_{i+1} \neq \emptyset$. Además, $M = M_1$ ó $M \cap M_1 \neq \emptyset$ y $M_s = M'$ ó $M_s \cap M' \neq \emptyset$. Entonces $M, M_1, M_2, \ldots, M_s, M'$ inducen un camino (no necesariamente simple) entre M y M' en $K(G)$.
Sea G trivialmente perfecto y conexo. $K(G)$ es conexo y por el Teorema 2.23 resulta ser completo, luego tiene una sola clique. Entonces $K^2(G)$ es el grafo trivial (el grafo de un solo vértice). □

Capítulo 3

Complejidad computacional de todos los parámetros

Diversos problemas algorítmicos con importancia desde el punto de vista teórico y con una gran cantidad de aplicaciones han sido estudiados en la literatura para la clase general de los grafos y para muchas de sus subclases. Los problemas de conjunto independiente máximo, número e índice cromático, clique máxima, conjunto dominante mínimo, circuito hamiltoniano, isomorfismo, son algunos de los más conocidos.

Enfocaremos nuestra atención en este trabajo sobre los ocho problemas de optimización relacionados con las clases de grafos presentadas en el capítulo anterior: clique máxima, cantidad máxima de cliques por vértice, número cromático, partición mínima de las cliques en conjuntos independientes, conjunto independiente máximo, conjunto independiente de cliques máximo, cubrimiento mínimo de cliques por vértices y cubrimiento mínimo de vértices por cliques, y sus problemas de decisión asociados. Los resultados de este capítulo aparecen en [13].

La complejidad de varios de estos problemas ha sido estudiada para la clase general de los grafos y varias de sus subclases. Se sabe que para los grafos perfectos los problemas de clique máxima, número cromático, conjunto independiente máximo y cubrimiento mínimo de vértices por cliques son polinomiales [60], sin embargo la complejidad del problema de reconocimiento de la clase de grafos perfectos es desconocida hasta el momento, aún en el caso de valer la SPGC.

Estudiaremos a continuación la complejidad de los ocho problemas mencionados en la clase de grafos clique-Helly hereditarios.

También analizaremos la complejidad de dos de los mismos con respecto a la clase #P, a partir de un resultado de Valiant, quien demostró en [119] que el problema de calcular cuántas cliques tiene un grafo es #P-completo.

3.1 Clique máxima

El problema de la clique máxima en un grafo G consiste en encontrar $\omega(G)$, es decir, el mayor entero k tal que existe un subgrafo completo de G de tamaño k. Su problema de decisión asociado es:

CLIQUE
INSTANCIA: Un grafo $G = (V, E)$, un entero positivo $K \leq |V|$
PREGUNTA: ¿ Existe en G una clique de tamaño $\geq K$?

El problema CLIQUE es NP-completo para la clase general de los grafos [75]. Es polinomial para grafos G con $\Delta(G)$ acotado [50], para grafos planares [50], para grafos de línea [50], para grafos cordales [53], para grafos de comparabilidad [43], para grafos circulares [54], para grafos arco-circulares [55] y para grafos perfectos [60].

En [97], Prisner prueba que en un grafo clique-Helly hereditario toda clique no trivial tiene una arista uniclical, luego la cantidad de cliques no triviales está acotada por la cantidad de aristas. Dado que la cantidad de cliques triviales en un grafo está acotada por la cantidad de vértices, resulta que la cantidad de cliques en un grafo clique-Helly hereditario es $O(n + m)$.

Por otra parte, existe un algoritmo que calcula todas las cliques de un grafo en tiempo $O(m.n.k)$, donde n es el número de vértices, m el número de aristas y k el número de cliques del grafo [110].

Entonces la matriz clique de un grafo clique-Helly hereditario tiene tamaño polinomial y puede ser calculada en tiempo polinomial en el tamaño del grafo.

Con lo cual, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1 *El problema* CLIQUE *es polinomial para grafos clique-Helly hereditarios.*

Demostración: La matriz clique A_G de un grafo G clique-Helly hereditario puede ser calculada en tiempo polinomial en el tamaño del grafo. Luego calcular $\omega(G) = \max_i \sum_j A_G(i, j)$ es polinomial en el tamaño de G, y por lo tanto el problema CLIQUE es polinomial para grafos clique-Helly hereditarios. $\square$

3.2 Número cromático

El problema del número cromático $\chi(G)$ en un grafo G, consiste en encontrar el menor entero k tal que existe un coloreo de los vértices de G con k colores en el cual dos vértices adyacentes no tengan el mismo color. Su problema de decisión asociado es:

K-COLOREO
INSTANCIA: Un grafo $G = (V, E)$, un entero positivo $K \leq |V|$
PREGUNTA: ¿ Existe en G un coloreo con menos de K colores ?

El problema K-COLOREO es NP-completo para la clase general de los grafos [75]. Es polinomial para $K = 2$, pero sigue siendo NP-completo para K fijo con $K \geq 3$ [50]. Para $K = 3$ es NP-completo aún para grafos G planares con $\Delta(G) \leq 4$ [51] y para los grafos intersección de segmentos en el plano [40]. Para un K arbitrario (que por ejemplo, podría depender de $|V|$), el problema es NP-completo para grafos circulares y arco-circulares, sin embargo para grafos arco-circulares el problema es polinomial para todo K fijo [52]. El problema general puede ser resuelto en tiempo polinomial para grafos de comparabilidad [43], para grafos cordales [53], para grafos G con $\Delta(G) \leq 3$ [50] y para grafos perfectos [60].

Teorema 3.2 *El problema* 3-COLOREO *es NP-completo para grafos clique-Helly hereditarios.*

Demostración: Vamos a ver que 3-COLOREO en el caso general, que como mencionamos anteriormente es NP-completo [50], se reduce polinomialmente a 3-COLOREO en grafos clique-Helly hereditarios.
Dado un grafo $G = (V, E)$, vamos a construir en tiempo polinomial un grafo $G' = (V', E')$ clique-Helly hereditario y de forma tal que G' es 3-coloreable si y sólo si G es 3-coloreable. La transformación es similar a la utilizada en [50] para demostrar que el problema de 3-coloreo en grafos G con $\Delta(G) \leq 4$ es NP-completo, y es la siguiente:

Sea H_3 el grafo de la figura 3.1, con 3 vértices de salida rotulados como 1, 2 y 3. Para $k \geq 4$ construimos el grafo H_k con k vértices de salida agregando a H_{k-1} una copia de H_3 haciendo coincidir su vértice 1 con el $k-1$ del H_{k-1}. Los vértices de salida son los de grado dos, renombrando 2 y 3 del H_3 como $k-1$ y k en el grafo H_k. En la figura 3.1 se ve H_5.
Se puede ver que para todo $k \geq 3$, se verifica:
(1) H_k tiene $7(k-2)+1$ vértices, incluyendo los k vértices rotulados.
(2) Los vértices de H_k tienen grado a lo sumo 4.
(3) Cada vértice de salida de H_k tiene grado 2.
(4) H_k es 3-coloreable, pero no 2-coloreable, y todo 3-coloreo de H_k le asigna el mismo color a todos sus vértices de salida.

Sean $v_1, v_2, \ldots, v_r$ los r vértices de G de grado ≥ 4. Construimos la secuencia de grafos $G = G_0, G_1, \ldots G_r = G'$ donde cada G_i, $1 \leq i \leq r$, se obtiene a

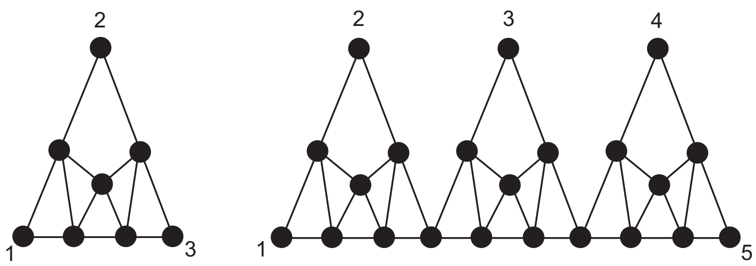


Figura 3.1: Los grafos H_3 y H_5.

partir de G_{i-1} de la siguiente manera: sea d el grado de v_i en G_{i-1} y sean $(u_1, v_i), (u_2, v_i), \ldots, (u_d, v_i)$ las aristas que involucran a v_i, entonces en G_i se reemplaza v_i por el grafo H_d y cada arista (u_j, v_i) por una arista que une u_j con el vértice rotulado con j en H_d.

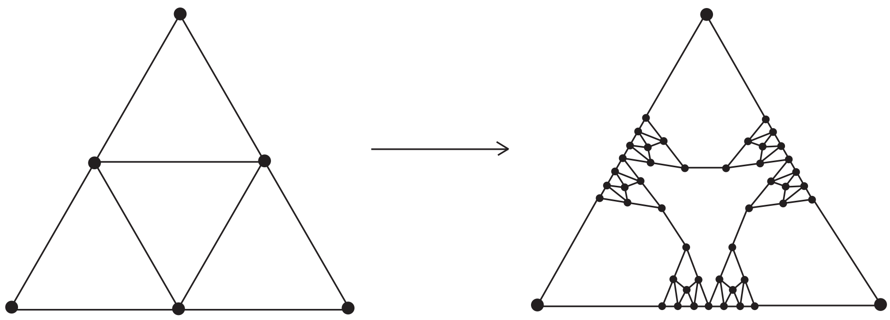


Figura 3.2: Ejemplo de la transformación de una instancia de 3-COLOREO a una de 3-COLOREO en CHH.

Por (4) resulta que G' es 3-coloreable si y sólo si G lo es, y por otro lado tenemos que los únicos vértices de grado 4 de G' son los vértices no rotulados de los H_k, entonces G' no contiene ninguno de los grafos de la figura 2.5 como subgrafo inducido, por lo tanto G' es clique-Helly hereditario. □

Teorema 3.3 *El problema* K-COLOREO *es NP-completo para grafos clique-Helly hereditarios.*

Demostración: 3-COLOREO en grafos clique-Helly hereditarios se reduce trivialmente a K-COLOREO en grafos clique-Helly hereditarios, y por el teorema anterior resulta que K-COLOREO en grafos clique-Helly hereditarios es NP-hard. Por último, como K-COLOREO $\in$ NP en el caso general, K-COLOREO en grafos clique-Helly hereditarios es NP-completo. □

3.3 Conjunto independiente máximo

El problema del conjunto independiente máximo en un grafo G consiste en encontrar $\alpha(G)$, es decir, el mayor entero k tal que existe un subgrafo inducido de G sin aristas de tamaño k. Su problema de decisión asociado es:

CONJUNTO INDEPENDIENTE
INSTANCIA: Un grafo $G = (V, E)$, un entero positivo $K \leq |V|$
PREGUNTA: ¿ Existe en G un conjunto de vértices independientes, de tamaño $\geq K$?

El problema CONJUNTO INDEPENDIENTE es NP-completo para la clase general de los grafos. Sigue siendo NP-completo para grafos totales de grafos bipartitos [50] y para grafos sin triángulos [94]. Es polinomial para grafos bipartitos, para grafos de línea, para grafos G con $\Delta(G) \leq 2$ [50], para grafos cordales [53], para grafos circulares [54], para grafos arco-circulares [55], para grafos de comparabilidad [57] y para grafos perfectos [60].

Teorema 3.4 *El problema* CONJUNTO INDEPENDIENTE *es NP-completo para grafos clique-Helly hereditarios.*

Demostración: Observemos que por el Teorema 2.7 un grafo sin triángulos es clique-Helly hereditario.
Dado que el problema CONJUNTO INDEPENDIENTE $\in$ NP en el caso general y es NP-completo para grafos sin triángulos [50], resulta que es NP-completo para grafos clique-Helly hereditarios. □

3.4 Cubrimiento mínimo de vértices por cliques

El problema del cubrimiento mínimo de vértices por cliques en un grafo G consiste en encontrar $k(G)$, es decir, el cardinal de un conjunto mínimo de cliques de G tal que todo vértice del grafo pertenezca a alguna clique del conjunto. Su problema de decisión asociado es:

CUBRIMIENTO DE VERTICES POR CLIQUES
INSTANCIA: Un grafo $G = (V, E)$, un entero positivo $K \leq |V|$
PREGUNTA: ¿ Existe en G un conjunto de cliques que cubran los vértices, de tamaño $\leq K$?

El problema CUBRIMIENTO DE VERTICES POR CLIQUES es NP-completo para la clase general de los grafos [75]. Sigue siendo NP-completo para grafos de línea [50], grafos K_4-free [50] y para K fijo con $K \geq 3$ [50]. Es polinomial para $K \leq 2$, para grafos sin triángulos [50], para grafos arco-circulares [55], para grafos cordales [53], para grafos de comparabilidad [57] y para grafos perfectos [60].

Para demostrar que CUBRIMIENTO DE VERTICES POR CLIQUES es NP-completo para grafos clique-Helly hereditarios, vamos a usar que el siguiente problema es NP-completo [50]:

CUBRIMIENTO EXACTO POR TERNAS (X3C)
INSTANCIA: Un conjunto X con $|X| = 3q$ y una colección C de ternas de elementos de X.
PREGUNTA: ¿ Existe una familia de q ternas de C tal que todo elemento de X pertenece a alguna de ellas ?

Teorema 3.5 *El problema* CUBRIMIENTO DE VERTICES POR CLIQUES *es NP-completo para grafos clique-Helly hereditarios.*

Demostración: Vamos a ver que X3C se reduce polinomialmente a CUBRIMIENTO DE VERTICES POR CLIQUES en grafos clique-Helly hereditarios. La transformación es similar a la utilizada en [50] para demostrar que el problema de partición de los vértices de un grafo en triángulos es NP-completo, y es la siguiente: sea el conjunto X con $|X| = 3q$ y la colección C de ternas de X. Construiremos en tiempo polinomial un grafo $G = (V, E)$ clique-Helly hereditario con $|V| = 3q\prime$ tal que G tiene un cubrimiento de vértices por cliques de tamaño a lo sumo $q\prime$ si y sólo si X tiene un cubrimiento exacto por ternas de C.
Vamos a reemplazar cada terna $\{x_i, y_i, z_i\} \in C$ por el grafo de la figura 3.3. Llamemos E_i al conjunto de 18 aristas del grafo correspondiente a $\{x_i, y_i, z_i\}$.

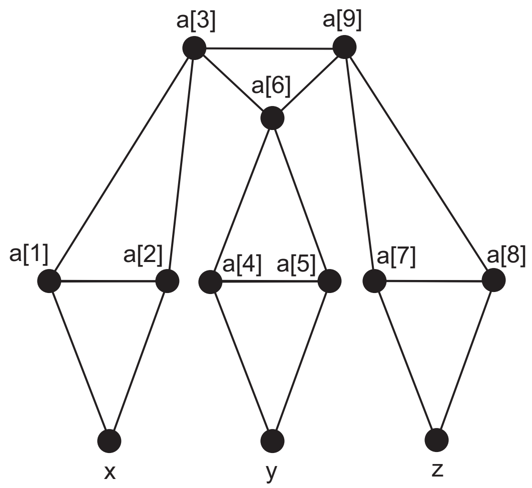


Figura 3.3: Reemplazo para $c = \{x, y, z\} \in C$ para transformar X3C a CUBRIMIENTO DE VERTICES POR CLIQUES.

Entonces $G = (V, E)$ queda definido por

$$V = X \cup \bigcup_{i=1}^{|C|} \{a_i[j] : 1 \leq j \leq 9\}, \;\; E = \bigcup_{i=1}^{|C|} E_i$$

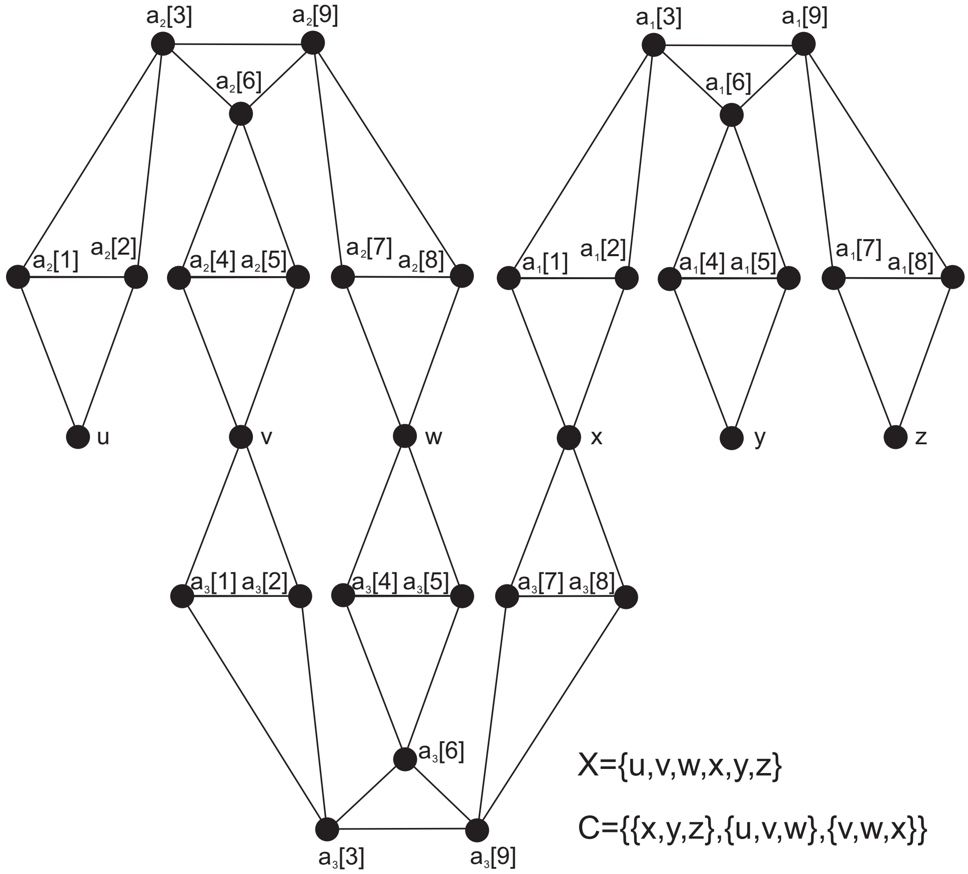


Figura 3.4: Ejemplo de transformación de una instancia de X3C en una instancia de CUBRIMIENTO DE VERTICES POR CLIQUES.

Es claro que el grafo así formado no contiene ninguno de los grafos de la figura 2.5 como subgrafo inducido, por lo tanto resulta clique-Helly hereditario. A su vez $|V| = |X|+9|C|$ ($q\prime = q+3|C|$) y por lo tanto la transformación es polinomial.

Supongamos que X tiene un cubrimiento exacto, entonces construimos un cubrimiento de V por $q\prime$ cliques (que en G son triángulos) tomando

$$\{a_i[1], a_i[2], x_i\}, \{a_i[4], a_i[5], y_i\}, \{a_i[7], a_i[8], z_i\}, \{a_i[3], a_i[6], a_i[9]\}$$

para los i tales que $c_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ está en el cubrimiento, y

$$\{a_i[1], a_i[2], a_i[3]\}, \{a_i[4], a_i[5], a_i[6]\}, \{a_i[7], a_i[8], a_i[9]\}$$

para los i tales que $c_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ no está en el cubrimiento.

Supongamos ahora que G tiene un cubrimiento por cliques de tamaño a lo sumo $q\prime$. Como las cliques de G son triángulos, resulta que el cubrimiento debe tener $q\prime$ cliques y cada vértice debe estar cubierto una sola vez.
Para cubrir cada uno de los grafos de la figura cubriendo una sola vez cada vértice sólo hay dos formas, las mencionadas anteriormente con 3 ó 4 cliques

dependiendo de si hay que cubrir o no a x_i, y_i ó z_i. Entonces el cubrimiento exacto de X por subconjuntos de C se logra tomando los c_i tales que $\{a_i[3], a_i[6], a_i[9]\}$ está en el cubrimiento por cliques de G.

Por último, como CUBRIMIENTO DE VERTICES POR CLIQUES $\in$ NP en el caso general, CUBRIMIENTO DE VERTICES POR CLIQUES en grafos clique-Helly hereditarios es NP-completo. □

3.5 Conjunto independiente de cliques máximo

El problema del conjunto independiente de cliques máximo en un grafo G consiste en encontrar $\alpha_C(G)$, es decir, el mayor entero k tal que existe un conjunto de tamaño k de cliques de G disjuntas dos a dos. Su problema de decisión asociado es:

CONJUNTO INDEPENDIENTE DE CLIQUES
INSTANCIA: Un grafo $G = (V, E)$, un entero positivo $K \leq |V|$
PREGUNTA: ¿ Existe en G un conjunto de cliques disjuntas dos a dos, de tamaño $\geq K$?

El problema CONJUNTO INDEPENDIENTE DE CLIQUES es NP-completo para la clase general de los grafos [23]. Sigue siendo NP-completo para grafos *split* [23], para complementos de grafos bipartitos [61], grafos totales [61], grafos de línea [61] y grafos planares [61]. Es polinomial para grafos fuertemente cordales [23], para grafos de comparabilidad [4] y para grafos arco-circulares Helly [61, 87].

Lema 3.1 *Sea G un grafo clique-Helly hereditario. Entonces $K(G)$ se construye en tiempo polinomial en el tamaño de G.*

Demostración: La matriz clique A_G de un grafo G clique-Helly hereditario puede ser calculada en tiempo polinomial en el tamaño del grafo. Por el Teorema 2.9, calcular la matriz clique de $K(G)$ a partir de la matriz clique de G es polinomial. Por último, calcular el grafo inducido por $A_{K(G)}$ (el grafo intersección de sus columnas) es polinomial en el tamaño de la matriz, que en este caso a su vez es polinomial en el tamaño de G. □

Teorema 3.6 *El problema* CONJUNTO INDEPENDIENTE DE CLIQUES *es polinomial para grafos que son, a la vez, clique-Helly hereditarios y K-perfectos.*

Demostración: Sea G clique-Helly hereditario y K-perfecto. Por el Lema 3.1 construir $K(G)$ es polinomial. Dado que $K(G)$ es perfecto, hallar $\alpha(K(G))$ es polinomial [60]. Por la Proposición 2.4, $\alpha_C(G) = \alpha(K(G))$. □

Lema 3.2 *Sea G un grafo clique-Helly hereditario. Entonces $H(G)$ se construye en tiempo polinomial en el tamaño de G.*

Demostración: La matriz clique A_G de un grafo G clique-Helly hereditario puede ser calculada en tiempo polinomial en el tamaño del grafo. Por el Teorema 2.17, calcular la matriz clique de $H(G)$ a partir de la matriz clique de G es polinomial. Por último, calcular el grafo inducido por $A_{H(G)}$ (el grafo intersección de sus columnas) es polinomial en el tamaño de la matriz, que en este caso a su vez es polinomial en el tamaño de G. □

Teorema 3.7 *El problema* CONJUNTO INDEPENDIENTE DE CLIQUES *es NP-completo para grafos clique-Helly hereditarios.*

Demostración: Vamos a construir una reducción polinomial de CONJUNTO INDEPENDIENTE en clique-Helly hereditarios (que por el Teorema 3.4 es NP-completo) a CONJUNTO INDEPENDIENTE DE CLIQUES en clique-Helly hereditarios. Sea G un grafo clique-Helly hereditario. Por el Lema 3.2 construir $H(G)$ es polinomial, y por el Teorema 2.18 $H(G)$ es clique-Helly hereditario. Por el Teorema 2.15 $K(H(G)) = G$, y entonces por la Proposición 2.4 $\alpha(G) = \alpha_C(H(G))$. Por último, como CONJUNTO INDEPENDIENTE DE CLIQUES $\in$ NP en el caso general, es NP-completo para grafos clique-Helly hereditarios. □

3.6 Cubrimiento mínimo de cliques por vértices

El problema del cubrimiento mínimo de cliques por vértices en un grafo G consiste en encontrar $\tau_C(G)$, es decir, el cardinal de un transversal de las cliques mínimo de G. Su problema de decisión asociado es:

CUBRIMIENTO DE CLIQUES POR VERTICES
INSTANCIA: Un grafo $G = (V, E)$, un entero positivo $K \leq |V|$
PREGUNTA: ¿ Existe en G un transversal de las cliques, de tamaño $\leq K$?

El problema CUBRIMIENTO DE CLIQUES POR VERTICES es NP-hard para la clase general de los grafos [41]. No se sabe si está en NP, de hecho el problema de verificar si un conjunto de vértices cubre todas las cliques de un grafo es NP-hard [39]. Sigue siendo NP-hard para grafos *split* [23], para complementos de grafos bipartitos, grafos de línea y grafos planares [61]. Es NP-completo para grafos planares con $\Delta = 3$ [61], y es polinomial para grafos fuertemente cordales [23], para grafos de comparabilidad [4] y para grafos arco-circulares Helly [37, 61].

Teorema 3.8 *El problema* CUBRIMIENTO DE CLIQUES POR VERTICES *es polinomial para grafos que son, a la vez, clique-Helly hereditarios y K-perfectos.*

Demostración: Sea G clique-Helly hereditario y K-perfecto. Por el Lema 3.1 construir $K(G)$ es polinomial. Dado que $K(G)$ es perfecto, hallar $k(K(G))$ es polinomial [60]. Por la Proposición 2.4, $\tau_C(G) = k(K(G))$. □

Teorema 3.9 *El problema* CUBRIMIENTO DE CLIQUES POR VERTICES *es NP-completo para grafos clique-Helly hereditarios.*

Demostración: Vamos a construir una reducción polinomial de CUBRIMIENTO DE VERTICES POR CLIQUES en clique-Helly hereditarios (que por el Teorema 3.5 es NP-completo) a CUBRIMIENTO DE CLIQUES POR VERTICES en clique-Helly hereditarios. Sea G un grafo clique-Helly hereditario. Por el Lema 3.2 construir $H(G)$ es polinomial, y por el Teorema 2.18 $H(G)$ es clique-Helly hereditario. Por el Teorema 2.15 $K(H(G)) = G$, y entonces por la Proposición 2.4 $k(G) = \tau_C(H(G))$.
Falta ver que pertenece a NP. Como la cantidad de cliques de un grafo clique Helly hereditario es polinomial y hay un algoritmo polinomial que las calcula, es polinomial en este caso verificar que un conjunto de vértices dado cubre todas las cliques del grafo. □

3.7 Cantidad máxima de cliques por vértice

El problema de la cantidad máxima de cliques por vértice en un grafo G consiste en encontrar $M(G)$, es decir, el mayor entero k tal que existe un vértice de G que pertenece a k cliques distintas de G. Su problema de decisión asociado es:

CLIQUES POR VERTICE
INSTANCIA: Un grafo $G = (V, E)$, un entero positivo K
PREGUNTA: ¿ Existe en G un vértice que esté en más de K cliques ?

La complejidad de este problema no está estudiada en la literatura hasta el momento.

Teorema 3.10 *El problema de hallar $M(G)$ es polinomial para grafos clique-Helly hereditarios.*

Demostración: La matriz clique A_G de un grafo G clique-Helly hereditario puede ser calculada en tiempo polinomial en el tamaño del grafo. Luego calcular $M(G) = \max_j \sum_i A_G(i, j)$ es polinomial en el tamaño de G, si G es un grafo clique-Helly hereditario. □

Si pedimos sólo clique-Helly, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.11 *El problema de hallar $M(G)$ es #P-hard para grafos que son, a la vez, clique-Helly y K-perfectos.*

Demostración: Vamos a construir una reducción polinomial del problema de hallar la cantidad de cliques de un grafo (que es #P-completo [119]) al problema de hallar $M(G)$ en un grafo clique-Helly y K-perfecto. Sea G un grafo, G^+ el grafo que resulta de agregarle a G un vértice universal u. Entonces las cliques de G^+ son de la forma M_i^+ donde M_i es una clique de G. Como u pertenece a todas las cliques, G^+ es clique-Helly y K-perfecto, y además $|C(G)| = |C(G^+)| = M(G^+)$. □

Teorema 3.12 *El problema de hallar M(G) es #P-completo en el caso general.*

Demostración: Dado que el problema es #P-hard para grafos clique-Helly y K-perfectos, lo es para el caso general. Falta ver que está en #P. La matriz clique A_G de un grafo G puede ser calculada en tiempo $O(m.n.k)$, donde k es el número de cliques de G. Luego calcular $M(G) = \max_j \sum_i A_G(i,j)$ es $O(m.n.k)$. Por último, dado que $k = |C(G)| \leq \sum_{i=1}^{n} m_G(v_i) \leq M(G).n$, se puede calcular $M(G)$ en tiempo $O(M(G).n^2.m)$, y por lo tanto el problema está en #P. □

3.8 Partición mínima de las cliques

El problema de la partición mínima de las cliques en conjuntos de cliques independientes en un grafo G consiste en encontrar $F(G)$, es decir, el cardinal de una partición mínima de las cliques de G en conjuntos de cliques disjuntas dos a dos. Su problema de decisión asociado es:

PARTICION DE LAS CLIQUES
INSTANCIA: Un grafo $G = (V, E)$, un entero positivo K
PREGUNTA: ¿ Existe una partición de las cliques de G en conjuntos de cliques independientes, de tamaño $\leq K$?

La complejidad de este problema no está estudiada en la literatura hasta el momento.

Teorema 3.13 *El problema* PARTICION DE LAS CLIQUES *es polinomial para grafos que son, a la vez, clique-Helly hereditarios y K-perfectos.*

Demostración: Sea G clique-Helly hereditario y K-perfecto. Por el Lema 3.1 construir $K(G)$ es polinomial. Dado que $K(G)$ es perfecto, hallar $\chi(K(G))$ es polinomial [60]. Por la Proposición 2.3, $F(G) = \chi(K(G))$. □

Teorema 3.14 *El problema* PARTICION DE LAS CLIQUES *es NP-completo para grafos clique-Helly hereditarios.*

Demostración: Vamos a construir una reducción polinomial de K-COLOREO en clique-Helly hereditarios (que por el Teorema 3.3 es NP-completo) a PARTICION DE LAS CLIQUES en clique-Helly hereditarios. Sea G un grafo clique-Helly hereditario. Por el Lema 3.2 construir $H(G)$ es polinomial, y por el Teorema 2.18 $H(G)$ es clique-Helly hereditario. Por el Teorema 2.15 $K(H(G)) = G$, y entonces por la Proposición 2.3 $\chi(G) = F(H(G))$.
Falta ver que pertenece a NP. Como la cantidad de cliques de un grafo clique Helly hereditario es polinomial y hay un algoritmo polinomial que las calcula, es polinomial en este caso verificar que una familia de conjuntos de subgrafos es una partición de las cliques del grafo y que en cada conjunto las cliques son disjuntas dos a dos. □

Corolario 3.1 *El problema* PARTICION DE LAS CLIQUES *es NP-hard en el caso general.*

Demostración: Para la clase de grafos clique-Helly hereditarios es NP-completo, por lo tanto para el caso general es NP-hard. □

En principio no es claro que este problema esté en NP en el caso general, ya que la cantidad de cliques podría ser exponencial y por lo tanto verificar una solución podría no ser polinomial.

Con respecto al problema de hallar $F(G)$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.15 *El problema de hallar $F(G)$ es #P-hard para grafos que son, a la vez, clique-Helly y K-perfectos.*

Demostración: Vamos a construir una reducción polinomial del problema de hallar la cantidad de cliques de un grafo (que es #P-completo [119]) al problema de hallar $F(G)$. Sea G un grafo, G^+ el grafo que resulta de agregarle a G un vértice universal u. Entonces las cliques de G^+ son de la forma M_i^+ donde M_i es una clique de G. Como u pertenece a todas las cliques, G^+ es clique-Helly y K-perfecto, y además en cualquier partición de las cliques en conjuntos de cliques independientes debe haber a lo sumo una clique por conjunto, luego $|C(G)| = |C(G^+)| = F(G^+)$. □

Teorema 3.16 *El problema de hallar $F(G)$ es #P-hard en el caso general.*

Demostración: Es consecuencia directa del Teorema 3.15. □

No sabemos aún si este problema pertenece a la clase #P.

Capítulo 4

Grafos balanceados

En este capítulo vamos a presentar propiedades y diversas caracterizaciones de los grafos balanceados (grafos cuya matriz clique es balanceada) y algunas de sus subclases.
Vamos a demostrar que son perfectos, clique-perfectos, coordinados, clique-Helly hereditarios y K-perfectos. También veremos que tienen reconocimiento polinomial.
Por último, estudiaremos el comportamiento del operador clique sobre los grafos balanceados y sus subclases.
Los resultados de este capítulo aparecen en [14].

Definición 4.1 Una matriz binaria A es balanceada si no contiene como submatriz la matriz de incidencia de un ciclo impar.

Definición 4.2 Un grafo G es balanceado si y sólo si su matriz clique A_G es balanceada.

Observación 4.1 *Los grafos balanceados están bien definidos, ya que si una matriz clique de G es balanceada, entonces toda matriz clique de G es balanceada.*

Fulkerson, Hoffman y Oppenheim demostraron en [48] el siguiente resultado, que implica que las matrices balanceadas son perfectas e ideales.

Teorema 4.1 (Fulkerson, Hoffman y Oppenheim, 1974) [48] *Si A es una matriz balanceada, entonces los poliedros $P(A) = \{x|x \in R^n, Ax \leq \mathbf{1}, x \geq 0\}$ y $Q(A) = \{x|x \in R^n, Ax \geq \mathbf{1}, x \geq 0\}$ tienen únicamente extremos enteros.*

Como corolario del Teorema 4.1 y el Teorema 2.3 de Chvátal, obtenemos lo siguiente:

Corolario 4.1 *Los grafos balanceados son perfectos.*

Demostración: Sea G un grafo balanceado. Por el Teorema 4.1 A_G es una matriz perfecta, y por el Teorema 2.3 resulta que G es un grafo perfecto. □

4.1 Reconocimiento

En esta sección estudiaremos la complejidad algorítmica del problema de reconocimiento de los grafos balanceados.
Para esto necesitamos algunos resultados. A partir del Teorema 2.8, podemos demostrar lo siguiente:

Corolario 4.2 *Los grafos balanceados son clique-Helly hereditarios.*

Demostración: Por el Teorema 2.8, sabemos que si un grafo G no es clique-Helly hereditario entonces A_G contiene como submatriz la matriz de incidencia de un triángulo (un C_3) luego G no es un grafo balanceado. □

En [97], Prisner prueba que en un grafo clique-Helly hereditario toda clique no trivial tiene una arista uniclical, luego la cantidad de cliques no triviales está acotada por la cantidad de aristas. Dado que la cantidad de cliques triviales en un grafo está acotada por la cantidad de vértices, resulta que la cantidad de cliques en un grafo clique-Helly hereditario es $O(n+m)$.

Corolario 4.3 *Sea G un grafo balanceado. Entonces la cantidad de cliques de G es polinomial en el tamaño de G.*

Demostración: Sea G un grafo balanceado de n vértices y m aristas. Por el Corolario 4.2 G es clique-Helly hereditario, y por lo tanto $|C(G)| \leq n+m$, luego la cantidad de cliques de G es polinomial en el tamaño de G. □

Existe un algoritmo que calcula todas las cliques de un grafo en tiempo $O(m.n.k)$, donde n es el número de vértices, m el número de aristas y k el número de cliques del grafo [110]. Entonces la matriz clique de un grafo clique-Helly hereditario puede ser calculada en tiempo polinomial en el tamaño del grafo.
Por otro lado, Conforti, Cornuéjols y Rao describen en [29] un algoritmo polinomial de reconocimiento para matrices binarias balanceadas.
Combinando ambos algoritmos, podemos afirmar lo siguiente:

Teorema 4.2 *Existe un algoritmo polinomial para el problema de reconocimiento de grafos balanceados.*

4.2 Caracterizaciones

Presentamos a continuación una caracterización de los grafos balanceados en términos de sus ciclos impares.

Teorema 4.3 *G es un grafo balanceado si y sólo si para todo ciclo impar $C_{2k+1} = v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$ existe una arista $e_i = (v_i, v_{i+1})$ de C_{2k+1} tal que $C(v_i) \cap C(v_{i+1}) = C_{e_i} \subseteq C(v_1) \cup C(v_2) \cup \cdots \cup C(v_{i-1}) \cup C(v_{i+2}) \cup \cdots \cup C(v_{2k+1})$ (todas las sumas son módulo 2k+1).*

Demostración:
$\Rightarrow$) Supongamos que hay un ciclo impar $C_{2k+1} = v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$ tal que para cualquier arista $e_i = (v_i, v_{i+1})$ de C_{2k+1}, $C(v_i) \cap C(v_{i+1}) = C_{e_i} \not\subseteq C(v_1) \cup C(v_2) \cup \cdots \cup C(v_{i-1}) \cup C(v_{i+2}) \cup \cdots \cup C(v_{2k+1})$. Entonces existe una clique M_i que contiene a v_i y v_{i+1}, pero no contiene ningún otro vértice del ciclo, para $i = 1, \ldots, 2k{+}1$. Ahora, eligiendo las filas de A_G correspondientes a $M_1, \ldots, M_{2k+1}$ y las columnas de A_G correspondientes a $v_1, \ldots, v_{2k+1}$, tenemos la matriz de incidencia de un ciclo impar como submatriz de A_G. Entonces A_G no es balanceada, lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$) Supongamos que A_G no es una matriz balanceada. Entonces tenemos la siguiente submatriz A' en A_G, donde $M_1, \ldots, M_{2k+1}$ son cliques de G y $v_1, \ldots, v_{2k+1}$ son vértices de G:

	v_1	v_2	v_3	$\ldots$	v_{2k+1}
M_1	1	1	0	$\ldots$	0
M_2	0	1	1	$\ldots$	0
M_3	0	0	1	$\ldots$	0
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
M_{2k+1}	1	0	0	$\ldots$	1

Entonces $v_1, \ldots, v_{2k+1}$ forman un ciclo impar en G y M_i es una clique que contiene a la arista $e_i = (v_i, v_{i+1})$ ($M_i \in C_{e_i}$). Pero M_i no contiene ningún otro vértice v_j del ciclo, si no habría un 1 en la posición (i, j) de A'. Luego $M_i \notin C(v_j)$ $\forall j \neq i, i+1$. Esto implica que $C_{e_i} \not\subseteq C(v_1) \cup C(v_2) \cup \cdots \cup C(v_{i-1}) \cup C(v_{i+2}) \cup \cdots \cup C(v_{2k+1})$ para cualquier arista e_i del ciclo, lo cual es una contradicción. $\square$

Análogamente, podemos plantear una caracterización en términos de las cliques del grafo.

Teorema 4.4 *G es un grafo balanceado si y sólo si para todo conjunto impar de cliques $\{M_1, M_2, \ldots, M_{2k+1}\}$ donde M_i interseca a M_{i+1} para $i = 1, \ldots, 2k+1$, existe un entero i $(1 \leq i \leq 2k+1)$ tal que $M_i \cap M_{i+1} \subseteq M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{i-1} \cup M_{i+2} \cup \cdots \cup M_{2k+1}$ (todas las sumas son módulo 2k+1).*

Demostración:
$\Rightarrow$) Supongamos que existe un conjunto $\{M_1, M_2, \ldots, M_{2k+1}\}$ donde M_i interseca a M_{i+1} para $i = 1, \ldots, 2k{+}1$, tal que para cualquier $i = 1, 2, \ldots, 2k{+}1$, $M_i \cap M_{i+1} \not\subseteq M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{i-1} \cup M_{i+2} \cup \cdots \cup M_{2k+1}$. Entonces, para $i = 1, \ldots, 2k+1$, existe un vértice v_i tal que $v_i \in M_i \cap M_{i+1}$, pero $v_i \notin M_j$ $\forall j \neq i, i+1$. Ahora, eligiendo las filas de A_G correspondientes a $M_1, \ldots, M_{2k+1}$ y las columnas de A_G correspondientes a $v_1, \ldots, v_{2k+1}$, tenemos una matriz de incidencia de un ciclo impar como submatriz de A_G. Luego A_G no es balanceada, lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$) Supongamos que A_G no es balanceada. Entonces, tenemos la siguiente submatriz A' en A_G, donde $M_1, \ldots, M_{2k+1}$ son cliques de G y $v_1, \ldots, v_{2k+1}$ son vértices de G:

	v_1	v_2	v_3	$\ldots$	v_{2k+1}
M_1	1	0	0	$\ldots$	1
M_2	1	1	0	$\ldots$	0
M_3	0	1	1	$\ldots$	0
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
M_{2k+1}	0	0	0	$\ldots$	1

Entonces $\{M_1, \ldots, M_{2k+1}\}$ es un conjunto impar de cliques de G donde M_i interseca a M_{i+1} para $i = 1, \ldots, 2k+1$, y v_i es un vértice que pertenece a $M_i \cap M_{i+1}$ pero no pertenece a ninguna otra clique M_j del conjunto, si no habría un 1 en la posición (j, i) de A'. Luego $v_i \notin M_j\ \forall j \neq i, i+1$. Esto implica que $M_i \cap M_{i+1} \not\subseteq M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{i-1} \cup M_{i+2} \cup \cdots \cup M_{2k+1}$ para $i = 1, \ldots, 2k+1$, lo cual es una contradicción. $\square$

4.3 Subclases y superclases

4.3.1 Grafos VE, EE, VV y EV

Un vértice v domina a un vértice w en un grafo G si toda clique de G que contiene a w, contiene a v también.

Una arista $e = (v_i, v_j)$ domina a una arista $f = (v_k, v_l)$ en un grafo G si toda clique de G que contiene a v_k y v_l, contiene a v_i y v_j también.

Un vértice v domina a una arista $e = (v_i, v_j)$ en un grafo G si toda clique de G que contiene a v_i y v_j, contiene a v también.

Una arista $e = (v_i, v_j)$ domina a un vértice w en un grafo G si toda clique de G que contiene a w, contiene a v_i y v_j también.

Un grafo G es VE si todo ciclo impar de G contiene un vértice v que domina a una arista $e = (v_i, v_j)$ del ciclo $(v \neq v_i, v_j)$.

Un grafo G es EE si todo ciclo impar de G contiene una arista $e = (v_i, v_j)$ que domina a otra arista $f = (v_k, v_l)$ del ciclo $(e \neq f)$.

Un grafo G es VV si todo ciclo impar de G contiene un vértice v que domina a otro vértice w del ciclo $(v \neq w)$.

Un grafo G es EV si todo ciclo impar de G contiene una arista $e = (v_i, v_j)$ que domina a un vértice v del ciclo $(v \neq v_i, v_j)$.

Veamos las relaciones de inclusión entre estas clases de grafos.

Teorema 4.5 *Sea G un grafo EV. Entonces G es un grafo EE y VV.*

Demostración: Sea $C = \{v_1, \ldots, v_{2j+1}\}$ un ciclo impar de G. Por hipótesis, como G es un grafo EV, existe una arista $e = (v_i, v_{i+1})$ de C que domina a un vértice v_k de C $(v_k \neq v_i, v_{i+1})$. Pero entonces $e = (v_i, v_{i+1})$ domina a $e_1 = (v_{k-1}, v_k)$ y $e_2 = (v_k, v_{k+1})$, lo que implica que G es un grafo EE. Por otra parte, v_i y v_{i+1} dominan a v_k, luego G es también un grafo VV. □

Teorema 4.6 *Sea G un grafo EE. Entonces G es un grafo VE.*

Demostración: Sea $C = \{v_1, \ldots, v_{2j+1}\}$ un ciclo impar de G. Por hipótesis, como G es un grafo EE, existe una arista $e = (v_i, v_{i+1})$ que domina a otra arista $f = (v_k, v_{k+1})$ de C $(e \neq f)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v_i \neq v_{k+1}$, luego v_i domina a $f = (v_k, v_{k+1})$, lo cual implica que G es un grafo VE. □

Teorema 4.7 *Sea G un grafo VV. Entonces G es un grafo VE.*

Demostración: Sea $C = \{v_1, \ldots, v_{2j+1}\}$ un ciclo impar de G. Por hipótesis, como G es un grafo VV, existe un vértice v_i que domina a otro vértice v_k $(v_i \neq v_k)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v_k \neq v_{i-1}$, luego v_i domina a $f = (v_k, v_{k+1})$, lo cual implica que G es un grafo VE. □

Finalmente, podemos ver que los grafos de cualquiera de estas clases son grafos balanceados, y en consecuencia también son grafos perfectos.

Teorema 4.8 *Sea G un grafo VE. Entonces G es balanceado.*

Demostración: Sea $C = \{v_1, \ldots, v_{2j+1}\}$ un ciclo impar de G. Por hipótesis, como G es un grafo VE, existe un vértice v_k que domina a una arista $e_i = (v_i, v_{i+1})$ $(v_k \neq v_i, v_{i+1})$. Entonces $C_{e_i} \subseteq C(v_k)$, y por lo tanto $C_{e_i} \subseteq C(v_1) \cup C(v_2) \cup \cdots \cup C(v_{i-1}) \cup C(v_{i+2}) \cup \cdots \cup C(v_{2k+1})$, lo cual implica, por el Teorema 4.3, que G es un grafo balanceado. □

Corolario 4.4 *Los grafos VE, EE, VV y EV son perfectos.*

Demostración: Es consecuencia directa de la serie de teoremas anteriores y el Corolario 4.1. □

Nota: En la figura 4.1, podemos ver que todas las inclusiones son estrictas.

Observación 4.2 *Los grafos bipartitos son grafos EV y en consecuencia son balanceados.*

Observación 4.3 *Por la forma en que están definidas, las clases VE, EE, VV y EV son hereditarias.*

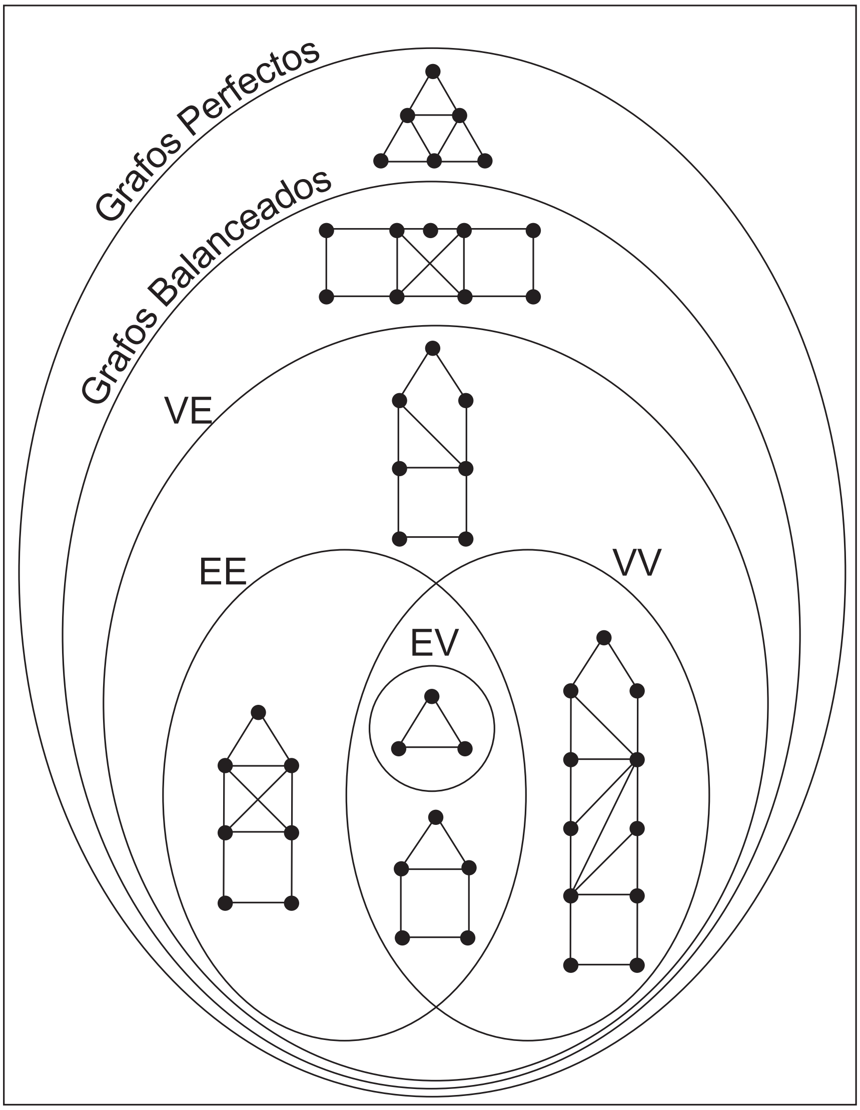


Figura 4.1: Intersección entre las clases

4.3.2 Grafos totalmente unimodulares

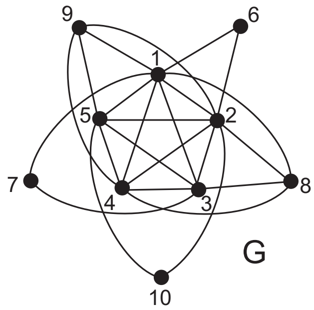
Los grafos totalmente unimodulares fueron definidos por Golumbic en [56] y no hay muchos resultados sobre ellos hasta el momento, si bien las matrices totalmente unimodulares han sido extensamente estudiadas y juegan un papel importante dentro de la teoría poliedral y la programación lineal entera.

Definición 4.3 Una matriz binaria A es totalmente unimodular si el determinante de cualquier submatriz cuadrada de A es 0, 1 ó -1.

Definición 4.4 Un grafo G es *totalmente unimodular* si y sólo si su matriz clique A_G es totalmente unimodular.

Observación 4.4 *Los grafos totalmente unimodulares están bien definidos, ya que si una matriz clique de G es totalmente unimodular, entonces toda matriz clique de G es totalmente unimodular (permutar filas y/o columnas sólo cambia el signo del determinante).*

Es sabido que las matrices totalmente unimodulares son balanceadas [90] y por lo tanto los grafos totalmente unimodulares resultan ser balanceados. La inclusión es estricta, se puede ver que el grafo de la figura 4.2 es balanceado pero no totalmente unimodular [32].



$$A_G = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Figura 4.2: Grafo balanceado pero no totalmente unimodular.

Los grafos de intervalos y los trivialmente perfectos son totalmente unimodulares [17], con lo cual resultan ser balanceados.

4.3.3 Grafos clique-perfectos, coordinados, K-perfectos

Veremos ahora que los grafos balanceados son clique-perfectos, coordinados, clique-perfectos$_c$, coordinados$_c$ y K-perfectos.
Primero necesitamos ver que la clase de grafos balanceados es una clase hereditaria y clique-hereditaria.

Lema 4.1 *Sea G un grafo y H un subgrafo inducido de G. Entonces A_H es la submatriz de A_G obtenida tomando las columnas correspondientes a los vértices de H y eliminando las filas que resulten incluidas.*

Demostración: Sea B la submatriz de A_G obtenida tomando las columnas correspondientes a los vértices de H. Toda clique de H puede ser extendida a al menos una clique de G, luego toda clique de H está representada por al menos una fila de B.
Por otra parte, cada fila de B representa a un subgrafo completo de H, el cual es una clique de H o está incluido en una clique de H. Luego A_H es la submatriz de B obtenida eliminando las filas incluidas. $\square$

Teorema 4.9 *La clase de los grafos balanceados es hereditaria.*

Demostración: Sea G un grafo balanceado, H un subgrafo inducido de G. Por el Lema 4.1 A_H es una submatriz de A_G, y dado que toda submatriz de una matriz balanceada es también balanceada, resulta que H es un grafo balanceado. □

Lema 4.2 *Sea G un grafo clique-Helly hereditario y $H = G_{i_1,\dots,i_s}$ un subgrafo clique de G. Entonces A_H es la submatriz de A_G obtenida tomando las filas $i_1,\dots,i_s$ y eliminando las columnas que resulten nulas.*

Demostración: Sea G un grafo CHH y $M_1, M_2, \dots, M_k$ sus cliques. Por el Corolario 2.5, G es clical y entonces las cliques de $H = G_{i_1,\dots,i_s}$ son $M_{i_1},\dots,M_{i_s}$. Al tomar la submatriz de A_G obtenida tomando las filas $i_1,\dots,i_s$, las columnas no nulas corresponden a los vértices que pertenecen a alguna de las cliques $M_{i_1},\dots,M_{i_s}$ en G, que por definición son exactamente los vértices de H. Luego A_H es la submatriz de A_G obtenida tomando las filas $i_1,\dots,i_s$ y eliminando las columnas que resulten nulas. □

Teorema 4.10 *La clase de los grafos balanceados es clique-hereditaria.*

Demostración: Sea G un grafo balanceado, H un subgrafo clique de G. Por el Corolario 4.2 G es clique-Helly hereditario, y luego por el Lema 4.2 A_H es una submatriz de A_G. Dado que toda submatriz de una matriz balanceada es también balanceada, resulta que H es un grafo balanceado. □

Como vimos en la sección 2.2.1, el cardinal de un transversal de las cliques mínimo y el tamaño de un conjunto de cliques independientes máximo, pueden ser planteados como problemas de programación lineal entera, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_C(G) = \max \mathbf{1} \cdot x & & \tau_C(G) = \min \mathbf{1} \cdot y \\ A_G^t \cdot x \leq \mathbf{1} & \text{y} & A_G \cdot y \geq \mathbf{1} \\ x \in \{0,1\}^k & & y \in \{0,1\}^n \end{array}$$

Si G es un grafo balanceado, sabemos que tanto A_G como A_G^t son matrices balanceadas (la matriz transpuesta de una matriz balanceada es balanceada). Luego, por el Teorema 4.1, los poliedros $P(A_G^t)$ y $Q(A_G)$ tienen extremos enteros, por lo tanto ambos problemas coinciden con su relajación lineal.

Esto lleva a dos resultados interesantes, uno desde el punto de vista algorítmico y otro desde el punto de vista teórico.

Por un lado, vimos que la matriz clique de un grafo balanceado tiene tamaño polinomial y puede ser calculada en tiempo polinomial. Con lo cual, para la clase de los grafos balanceados, los problemas de hallar $\tau_C(G)$ y $\alpha_C(G)$ pueden ser resueltos en tiempo polinomial.

Por otro lado, resulta que los grafos balanceados cumplen varias de las propiedades estudiadas hasta ahora.

Teorema 4.11 *Los grafos balanceados son clique-perfectos y clique-perfectos$_c$.*

Demostración: Sea G un grafo balanceado. Entonces A_G es balanceada, y podemos resolver los problemas de determinar $\tau_C(G)$ y $\alpha_C(G)$ usando las relajaciones lineales correspondientes a las formulaciones enteras.
Dichas relajaciones lineales son duales y por lo tanto tienen el mismo valor óptimo. Luego para un grafo G balanceado, $\tau_C(G) = \alpha_C(G)$.
Sea H_1 un subgrafo inducido de G. Por el Teorema 4.9, H_1 es un grafo balanceado y por lo tanto $\tau_C(H_1) = \alpha_C(H_1)$.
Entonces G es clique-perfecto.
Sea ahora H_2 un subgrafo clique de G. Por el Teorema 4.10, H_2 es un grafo balanceado y por lo tanto $\tau_C(H_2) = \alpha_C(H_2)$.
Entonces G es clique-perfecto$_c$. □

Teorema 4.12 *Los grafos balanceados son K-perfectos y coordinados$_c$.*

Demostración: Sea G un grafo balanceado. Por el Corolario 4.2, G es clique-Helly hereditario y por el Teorema 4.11 G es clique-perfecto$_c$. Finamente, por el Teorema 2.13, G resulta ser K-perfecto y coordinado$_c$. □

Teorema 4.13 *Los grafos balanceados son coordinados.*

Demostración: Sea G un grafo balanceado y H un subgrafo inducido de G. Por el Teorema 4.9, H es un grafo balanceado y entonces por el Teorema 4.12, H es coordinado$_c$, en particular $M(H) = F(H)$. Por lo tanto G es coordinado. □

Observemos además que dada la matriz clique A_G de un grafo balanceado G, resulta que

$$M(G) = \max_j \sum_i A_G(i,j)$$

con lo cual $M(G)$ y por lo tanto $F(G)$, dado que coinciden, pueden ser calculados en tiempo polinomial en el tamaño de G.

4.4 Grafos clique de grafos balanceados

En esta sección probaremos que la clase de los grafos balanceados y la clase de los grafos totalmente unimodulares son clases fijas bajo el operador clique, y daremos una caracterización de los grafos clique de grafos en VE, EE, VV y EV.

Teorema 4.14 *Si G es un grafo balanceado entonces $K(G)$ es un grafo balanceado.*

Demostración: Si G es un grafo balanceado, por el Corolario 4.2 G es clique-Helly. Entonces por el Teorema 2.9, $A_{K(G)}$ es la submatriz de A_G^t que se obtiene eliminando las filas incluidas. Como A_G es una matriz balanceada, A_G^t es balanceada también, y toda submatriz de una matriz balanceada es balanceada. Por lo tanto $K(G)$ es un grafo balanceado. $\Box$

Teorema 4.15 *G es un grafo balanceado $\Leftrightarrow$ G es clique-Helly y $H(G)$ es balanceado.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Si G es balanceado, entonces por el Corolario 4.2 G es clique-Helly. Entonces $A_{H(G)} = A_G^t \mid I_n$ (Teorema 2.17), y A_G es balanceada, luego A_G^t es balanceada. Por otra parte, todas las columnas de la matriz de incidencia de un ciclo impar tienen dos unos, luego si A_G^t es balanceada entonces $A_{H(G)}$ también es balanceada.

$\Leftarrow$) Si G es clique-Helly y $H(G)$ es balanceado, $G = K(H(G))$ (Teorema 2.15) y entonces G es balanceado (Teorema 4.14). $\Box$

Corolario 4.5 *La clase de grafos balanceados es fija bajo el operador K.*

Demostración: Probamos que el grafo clique de un grafo balanceado es balanceado (Teorema 4.14) y a su vez que todo grafo balanceado es el grafo clique de algún grafo balanceado (Teorema 4.15). $\Box$

Teorema 4.16 *Si G es un grafo totalmente unimodular entonces $K(G)$ es totalmente unimodular.*

Demostración: Si G es un grafo totalmente unimodular entonces G es balanceado y luego G es clique-Helly (Corolario 4.2). Por lo tanto podemos aplicar el Teorema 2.9. Si A_G es una matriz totalmente unimodular, entonces A_G^t es totalmente unimodular ya que para toda matriz cuadrada M, $det(M) = det(M^t)$. Y toda submatriz de una matriz totalmente unimodular es totalmente unimodular. Luego $A_{K(G)}$ es una matriz totalmente unimodular. $\Box$

Teorema 4.17 *G es totalmente unimodular $\Leftrightarrow$ G es clique-Helly y $H(G)$ es totalmente unimodular.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Si G es un grafo totalmente unimodular entonces G es balanceado y luego G es clique-Helly (Corolario 4.2). Por lo tanto podemos aplicar el Teorema 2.17. Sabemos que $A_{H(G)} = A_G^t \mid I_n$, y A_G es totalmente unimodular, luego A_G^t es totalmente unimodular. Toda submatriz cuadrada M

de $A_{H(G)}$ se puede escribir como $M = M_1 \mid M_2$, donde M_1 es una submatriz de A^t_G y M_2 es una submatriz de I_n. Desarrollando el determinante por las columnas de M_2, resulta que M es singular o $det(M) = \pm det(M_3)$, donde M_3 es una submatriz cuadrada de M_1. Entonces, en ambos casos, $det(M) = 0$ ó ± 1. Por lo tanto $H(G)$ es totalmente unimodular.

$\Leftarrow$) Si G es clique-Helly y $H(G)$ es totalmente unimodular, $G = K(H(G))$ (Teorema 2.15) y entonces G es totalmente unimodular (Teorema 4.16). □

Corolario 4.6 *La clase de grafos totalmente unimodulares es fija bajo el operador K.*

Demostración: Probamos que el grafo clique de un grafo totalmente unimodular es totalmente unimodular (Teorema 4.16) y a su vez que todo grafo totalmente unimodular es el grafo clique de algún grafo totalmente unimodular (Teorema 4.17). □

Observemos que la clase de los grafos balanceados y la clase de los grafos totalmente unimodulares están definidas en forma similar. Podemos generalizar este concepto de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{A}$ una clase de matrices binarias. Podemos definir la clase de grafos $G(\mathcal{A})$ como aquellos grafos cuya matriz clique pertenece a $\mathcal{A}$.
Para que esta definición sea consistente, $\mathcal{A}$ debe ser cerrada bajo permutaciones de filas y de columnas, ya que la matriz clique de un grafo es única salvo permutaciones de filas y de columnas.

Lema 4.3 *Sea $\mathcal{A}$ una clase de matrices binarias cerrada bajo permutaciones de filas y de columnas. Si $\mathcal{A}$ verifica las siguientes condiciones:*

(i) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^t \in \mathcal{A}$.

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow$ *toda B submatriz de A pertenece a $\mathcal{A}$.*

(iii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A|Id \in \mathcal{A}$.

entonces:

(1) $G(\mathcal{A}) \cap CH$ *es una clase fija bajo el operador clique.*

(2) $G(\mathcal{A}) \cap CHH$ *es una clase hereditaria, clique-hereditaria y fija bajo el operador clique.*

Demostración:
(1) Sea G un grafo clique-Helly en $G(\mathcal{A})$, luego $A_G \in \mathcal{A}$. Por el Teorema 2.9, $A_{K(G)}$ es una submatriz de A^t_G, y por (i) y (ii), $A_{K(G)} \in \mathcal{A}$. Como la clase de grafos clique-Helly es fija, $K(G)$ es clique-Helly y pertenece a $G(\mathcal{A})$.
Por el Teorema 2.17, $A_{H(G)}$ es $A^t_G|I_n$, y por (iii), $A_{H(G)} \in \mathcal{A}$. Por el Teorema 2.18 $H(G)$ es clique-Helly y pertenece a $G(\mathcal{A})$.
Por la observación 2.6, $G(\mathcal{A}) \cap CH$ es una clase fija.

(2) Sea G un grafo CHH en $G(\mathcal{A})$, luego $A_G \in \mathcal{A}$. Por el Teorema 2.9, $A_{K(G)}$ es una submatriz de A^t_G, y por (i) y (ii), $A_{K(G)} \in \mathcal{A}$. Como la clase de grafos CHH es fija, $K(G)$ es CHH y pertenece a $G(\mathcal{A})$.
Por el Teorema 2.17, $A_{H(G)}$ es $A^t_G|I_n$, y por (iii), $A_{H(G)} \in \mathcal{A}$. Por el Teorema 2.18 $H(G)$ es CHH y pertenece a $G(\mathcal{A})$.
Por la observación 2.6, $G(\mathcal{A}) \cap CHH$ es una clase fija.
Como la clase de grafos CHH es hereditaria y clique-hereditaria (observación 2.5), por (ii) y los lemas 4.1 y 4.2 resulta que $G(\mathcal{A}) \cap CHH$ es una clase hereditaria y clique-hereditaria. □

Un caso particular de familias de matrices que cumplen estas condiciones son las familias de matrices $\mathcal{A}$ definidas por submatrices prohibidas (por definición verifican (ii)), donde la familia $\mathcal{B}$ de submatrices prohibidas es cerrada por permutaciones de filas y de columnas y transposición (luego $\mathcal{A}$ lo es), y tal que toda matriz de $\mathcal{B}$ tiene al menos dos unos por columna (luego $\mathcal{A}$ verifica (iii)). Tal es el caso de las matrices balanceadas, y como los grafos balanceados resultan ser de por si clique-Helly hereditarios, son clase fija. Hay varias otras clases conocidas de grafos en estas condiciones:

- Los grafos CHH: como vimos en el Teorema 2.8, son los grafos cuya matriz clique no contiene como submatriz la matriz de incidencia de un triángulo. Prisner demostró en [97] que son clase fija.

- Los grafos fuertemente cordales: son los grafos totalmente balanceados, grafos cuya matriz clique no contiene como submatriz la matriz de incidencia de un ciclo. Claramente, son subclase de los balanceados, y Prisner demostró en [96] que son clase fija.

- Los grafos sin diamantes: son los grafos cuya matriz clique no contiene como sumatriz una matriz de 1's de 2×2. En [24] se prueba que son clase fija.

Sea $S = \{M_1, M_2, \ldots, M_{2k+1}\}$ un conjunto impar de cliques de G, donde M_i interseca a M_{i+1} para $i = 1, \ldots, 2k+1$ (todas las sumas son módulo 2k+1).

Un grafo G es *dualmente EE* (DEE) si para cualquier conjunto S de esa forma, existen cliques $M_i, M_{i+1}, M_j, M_{j+1}$ tales que $M_i \cap M_{i+1} \subseteq M_j \cap M_{j+1}$, con $i \neq j$.

Un grafo G es *dualmente VE* (DVE) si para cualquier conjunto S de esa forma, existen cliques M_i, M_{i+1}, M_j tales que $M_i \cap M_{i+1} \subseteq M_j$, con $i \neq j, i+1 \neq j$.

Teorema 4.18 *Si G es un grafo DEE, entonces G es DVE.*

Demostración: Sea $S = \{M_1, M_2, \ldots, M_{2k+1}\}$ un conjunto de cliques de G, donde M_i interseca a M_{i+1} para $i = 1, \ldots, 2k+1$. Por hipótesis, como G es un grafo DEE, existen cliques $M_i, M_{i+1}, M_j, M_{j+1}$ tales que $M_i \cap M_{i+1} \subseteq$

$M_j \cap M_{j+1}$ $(i \neq j)$. Luego $M_i \cap M_{i+1} \subseteq M_j$, y si $i + 1 = j$ entonces $i \neq j+1, i+1 \neq j+1$ y $M_i \cap M_{i+1} \subseteq M_{j+1}$, lo cual implica que G es un grafo DVE. □

Teorema 4.19 *Sea G un grafo DVE. Entonces G es balanceado.*

Demostración: Sea $S = \{M_1, M_2, \ldots, M_{2k+1}\}$ un conjunto de cliques de G, donde M_i interseca a M_{i+1} para $i = 1, \ldots, 2k+1$.
Por hipótesis, como G es un grafo DVE, existen cliques M_i, M_{i+1}, M_j tales que $M_i \cap M_{i+1} \subseteq M_j$, con $i \neq j, i+1 \neq j$. Entonces $M_i \cap M_{i+1} \subseteq M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{i-1} \cup M_{i+2} \cup \cdots \cup M_{2k+1}$, lo cual implica, por el Teorema 4.4, que G es un grafo balanceado. □

Para la demostración de los teoremas siguientes, necesitamos primero un resultado:

Lema 4.4 *Si G es un grafo clique-Helly, las cliques de $K(G)$ son de la forma $C(v)$, con $v \in G$.*

Demostración: Sea G un grafo clique-Helly, $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ los vértices de G, $C(G) = \{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ las cliques de G. $C(v_i)$ induce un subgrafo completo en $K(G)$, ya que v_i pertenece a la intersección de todas las cliques de $C(v_i)$, luego $C(v_i)$ es una clique de $K(G)$ ó $C(v_i)$ está incluido en una clique de $K(G)$.
Por otro lado, sea $\{M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_s}\}$ una clique de $K(G)$, es decir un conjunto maximal de cliques de G que se intersecan dos a dos. Como G es clique-Helly, tienen algún elemento común v, luego $\{M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_s}\} \subseteq C(v)$. Por maximalidad, $\{M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_s}\} = C(v)$. □

Teorema 4.20 *Sea G un grafo.*

(i) *Si $G \in DVE$ entonces $K(G) \in VE$.*

(ii) *Si $G \in DEE$ entonces $K(G) \in EE$.*

(iii) *Si $G \in VE$ entonces $K(G) \in DVE$.*

(iv) *Si $G \in EE$ entonces $K(G) \in DEE$.*

Demostración: Sea G un grafo. Como DVE, DEE, VE y EE son subclases de los grafos balanceados, y los grafos balanceados son clique-Helly, podemos asumir para esta demostración que G es un grafo clique-Helly. Los vértices de $K(G)$ son las cliques de G, y por el Lema 4.4, las cliques de $K(G)$ son algunos de los $C(v)$ con $v \in V(G)$.

Sea $\{M_1, M_2, \ldots, M_{2k+1}\}$ un ciclo impar en $K(G)$, entonces M_i interseca a M_{i+1} en G, para $i = 1, 2, \ldots, 2k+1$.

Si $G \in DVE$, existen cliques M_i, M_{i+1}, M_j tales que $M_i \cap M_{i+1} \subseteq M_j$ $(i, i+1 \neq j)$. Sea $C(v)$ una clique de $K(G)$ que contiene a M_i y M_{i+1}, entonces, en G, $v \in M_i \cap M_{i+1} \Rightarrow v \in M_j$ y por lo tanto $C(v)$ contiene a M_j también. Entonces, en $K(G)$, el vértice M_j domina a la arista (M_i, M_{i+1}) y, en consecuencia, si $G \in DVE$ entonces $K(G) \in VE$.

Si $G \in DEE$, existen cliques $M_i, M_{i+1}, M_j, M_{j+1}$ tales que $M_i \cap M_{i+1} \subseteq M_j \cap M_{j+1}$ $(i \neq j)$. Sea $C(v)$ una clique de $K(G)$ que contiene a M_i y M_{i+1}, entonces, en G, $v \in M_i \cap M_{i+1} \Rightarrow v \in M_j \cap M_{j+1}$ y por lo tanto $C(v)$ contiene a M_j y M_{j+1} también. Entonces, en $K(G)$, la arista (M_j, M_{j+1}) domina a la arista (M_i, M_{i+1}) y, en consecuencia, si $G \in DEE$ entonces $K(G) \in EE$.

Ahora, sea $\{C(v_1), C(v_2), \ldots, C(v_{2k+1})\}$ un conjunto impar de cliques en $K(G)$, donde $C(v_i)$ interseca a $C(v_{i+1})$ para $i = 1, 2, \ldots, 2k+1$. Entonces para cada i existe una clique M_i de G tal que v_i y v_{i+1} pertenecen a M_i, y luego v_i y v_{i+1} son adyacentes en G, por lo tanto $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$ es un ciclo impar en G.

Si $G \in VE$, existe un vértice v_j del ciclo que domina a una arista (v_i, v_{i+1}) con $j \neq i, i+1$. Sea M un vértice de $K(G)$, $M \in C(v_i) \cap C(v_{i+1})$ en $K(G)$, v_i y v_{i+1} pertenecen a M en G, y por lo tanto v_j pertenece a M también. Luego $M \in C(v_j)$, y en consecuencia $C(v_i) \cap C(v_{i+1}) \subseteq C(v_j)$. Entonces $G \in VE \Rightarrow K(G) \in DVE$.

Si $G \in EE$, hay una arista (v_j, v_{j+1}) del ciclo que domina a otra arista (v_i, v_{i+1}) con $j \neq i$. Sea M un vértice de $K(G)$, $M \in C(v_i) \cap C(v_{i+1})$ en $K(G)$, v_i y v_{i+1} pertenecen a M en G, y por lo tanto v_j y v_{j+1} pertenecen a M también. Luego $M \in C(v_j) \cap C(v_{j+1})$, y en consecuencia $C(v_i) \cap C(v_{i+1}) \subseteq C(v_j) \cap C(v_{j+1})$. Entonces $G \in EE \Rightarrow K(G) \in DEE$. □

Teorema 4.21 *Sea G un grafo clique-Helly.*

(i) $G \in DVE$ *si y sólo si* $H(G) \in VE$.

(ii) $G \in DEE$ *si y sólo si* $H(G) \in EE$.

(iii) $G \in VE$ *si y sólo si* $H(G) \in DVE$.

(iv) $G \in EE$ *si y sólo si* $H(G) \in DEE$.

Demostración: Sea G un grafo clique-Helly, y H(G) como en la Definición 2.15, con $V(H(G)) = \{q_1, q_2, \ldots, q_k, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, donde cada q_i corresponde a la clique M_i de G, y cada w_i corresponde al vértice v_i de G. Por el Teorema 2.15, las cliques de $H(G)$ son $N[w_i]$ para cada i. Entonces w_i y todas sus aristas incidentes se dominan entre si.

Sea C un ciclo impar en $H(G)$. Si hay algún vértice w_i en C, entonces C contiene un vértice que domina a una arista, y una arista que domina a otra arista. Si no existe tal vértice, C es un ciclo impar $\{q_{r_1}, q_{r_2}, \ldots, q_{r_{2s+1}}\}$ que corresponde a un conjunto impar de cliques $\{M_{r_1}, M_{r_2}, \ldots, M_{r_{2s+1}}\}$ de G, tales que M_{r_i} interseca a $M_{r_{i+1}}$ para $i = 1, 2, \ldots, 2s+1$.

Si $G \in DVE$, existen cliques $M_{r_i}, M_{r_{i+1}}, M_{r_j}$ tales que $M_{r_i} \cap M_{r_{i+1}} \subseteq M_{r_j}$ $(i, i+1 \neq j)$. Sea $N[w_l]$ una clique de $H(G)$ que contiene a q_{r_i} y $q_{r_{i+1}}$, entonces, en G, $v_l \in M_{r_i} \cap M_{r_{i+1}} \Rightarrow v_l \in M_{r_j}$ y por lo tanto, en $H(G)$, $N[w_l]$ contiene a q_{r_j} también. Luego, en $H(G)$, el vértice q_{r_j} domina a la arista $(q_{r_i}, q_{r_{i+1}})$ y, en consecuencia, si $G \in DVE$ entonces $H(G) \in VE$.

Si $G \in DEE$, existen cliques $M_{r_i}, M_{r_{i+1}}, M_{r_j}, M_{r_{j+1}}$ tales que $M_{r_i} \cap M_{r_{i+1}} \subseteq M_{r_j} \cap M_{r_{j+1}}$ $(i \neq j)$. Sea $N[w_l]$ una clique de $K(G)$ que contiene a M_{r_i} y $M_{r_{i+1}}$, entonces, en G, $v_l \in M_{r_i} \cap M_{r_{i+1}} \Rightarrow v_l \in M_{r_j} \cap M_{r_{j+1}}$ y por lo tanto, en $H(G)$, $N[w_l]$ contiene a q_{r_j} y $q_{r_{j+1}}$ también. Luego, en $H(G)$, la arista $(q_{r_j}, q_{r_{j+1}})$ domina a la arista $(q_{r_i}, q_{r_{i+1}})$ y, en consecuencia, si $G \in DEE$ entonces $H(G) \in EE$.

Ahora, sea $\{N[w_{r_1}], N[w_{r_2}], \ldots, N[w_{r_{2s+1}}]\}$ un conjunto impar de cliques de $H(G)$, donde $N[w_{r_i}]$ interseca a $N[w_{r_{i+1}}]$ para $i = 1, 2, \ldots, 2s+1$. Entonces para cada i existe un vértice $q \in N[w_{r_i}] \cap N[w_{r_{i+1}}]$. Luego v_{r_i} y $v_{r_{i+1}}$ pertenecen a la clique correspondiente M de G, y entonces v_{r_i} y $v_{r_{i+1}}$ son adyacentes en G, luego $v_{r_1}, v_{r_2}, \ldots, v_{r_{2s+1}}$ es un ciclo impar en G.

Si $G \in VE$, hay un vértice v_{r_j} del ciclo que domina a una arista $(v_{r_i}, v_{r_{i+1}})$ con $j \neq i, i+1$. Sea q_l un vértice de $H(G)$, $q_l \in N[w_{r_i}] \cap N[w_{r_{i+1}}]$ en $H(G)$, v_i y v_{i+1} pertenecen a M_l en G, y por lo tanto v_j pertenece a M_l también. Luego $q_l \in N[w_{r_j}]$, y en consecuencia $N[w_{r_i}] \cap N[w_{r_{i+1}}] \subseteq N[w_{r_j}]$. Entonces $G \in VE \Rightarrow H(G) \in DVE$.

Si $G \in EE$, hay una arista $(v_{r_j}, v_{r_{j+1}})$ del ciclo que domina a otra arista $(v_{r_i}, v_{r_{i+1}})$ con $j \neq i$. Sea q_l un vértice de $H(G)$, $q_l \in N[w_{r_i}] \cap N[w_{r_{i+1}}]$ en $H(G)$, v_{r_i} y $v_{r_{i+1}}$ pertenecen a M_l en G, y por lo tanto v_{r_j} y $v_{r_{j+1}}$ pertenecen a M_l también. Luego $q_l \in N[w_{r_j}] \cap N[w_{r_{j+1}}]$ en $H(G)$, y en consecuencia $N[w_{r_i}] \cap N[w_{r_{i+1}}] \subseteq N[w_{r_j}] \cap N[w_{r_{j+1}}]$. Entonces $G \in EE \Rightarrow H(G) \in DEE$.

Las propiedades recíprocas se obtienen por el Teorema 2.15, aplicando el Teorema 4.20 a $H(G)$. □

Corolario 4.7 *Las clases EE y DEE son clique-duales y distintas.*

Demostración: La dualidad es consecuencia directa de los Teoremas 4.20 y 4.21, y la observación 2.6. En la figura 4.3 se puede ver que las clases son distintas. □

Corolario 4.8 *Las clases VE y DVE son clique-duales y distintas.*

Demostración: La dualidad es consecuencia directa de los Teoremas 4.20 y 4.21, y la observación 2.6. En la figura 4.4 se puede ver que las clases son distintas. □

Teorema 4.22 *Si G es un grafo VV, entonces $K^2(G)$ es un grafo bipartito.*

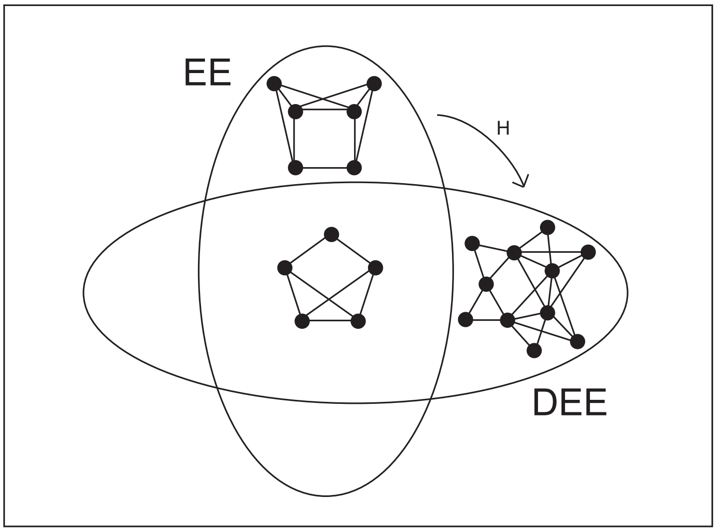


Figura 4.3: Intersección entre las clases clique-duales EE y DEE

Demostración: Si G es un grafo VV entonces G es clique-Helly (Corolario 4.2), luego por el Teorema 2.9 y el Lema 4.1, tenemos que $K^2(G)$ es el subgrafo de G que se obtiene eliminando los vértices correspondientes a las columnas incluidas de A_G, es decir, los vértices dominados. Si G es un grafo VV, todo ciclo impar de G tiene un vértice dominado, luego $K^2(G)$ no tiene ciclos impares, por lo tanto es un grafo bipartito. □

Teorema 4.23 *Sea G un grafo. $K(G)$ es un grafo bipartito si y sólo si G es clique-Helly y $H(G)$ es un grafo EV.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Sea G un grafo, $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ los vértices de G, $C(G) = \{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ las cliques de G. Como $K(G)$ es un grafo bipartito, G es clique-Helly porque cualquier conjunto de cliques que se intersecan dos a dos tiene a lo sumo dos elementos.
$V(H(G)) = V(K(G)) \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ como en la Definición 2.15. $K(G)$ es un grafo bipartito y por definición de $H(G)$, todo ciclo impar C de $H(G)$ debe contener algún vértice w_i de $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Por el Teorema 2.15 w_i es un vértice uniclical, luego las aristas de C incidentes a w_i dominan al vértice w_i, y entonces $H(G)$ es un grafo EV.

$\Leftarrow$) Si G es un grafo clique-Helly y $H(G)$ es un grafo EV, entonces es también un grafo VV. Luego por el Teorema 4.22 $K^2(H(G)) = K(G)$ es un grafo bipartito. □

Llamemos *bip* a la clase de los grafos bipartitos.

Corolario 4.9 $K^2(VV) = K^2(EV) = bip$.

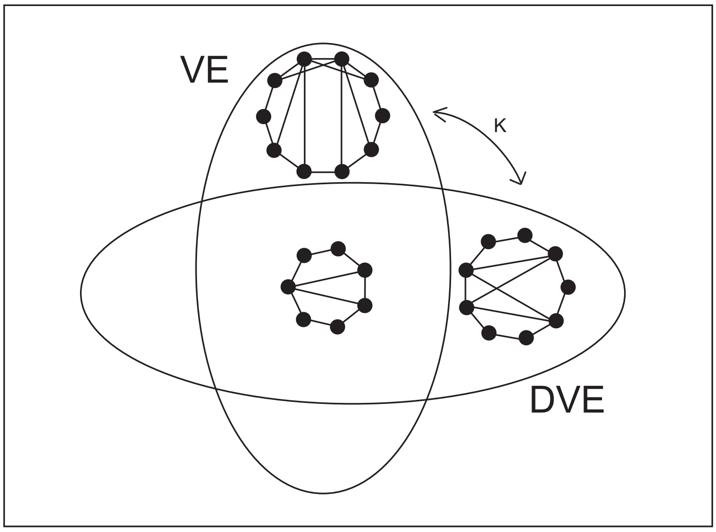


Figura 4.4: Intersección entre las clases clique-duales VE y DVE

Demostración: Probaremos que $K^2(EV) \subseteq K^2(VV) \subseteq bip \subseteq K^2(EV)$ y por lo tanto las tres clases coinciden. La primer inclusión vale porque $EV \subseteq VV$. La segunda inclusión se deduce del Teorema 4.22. Ahora, para cualquier grafo bipartito G, tenemos que $K(H(G)) = G$ y aplicando el Teorema 4.23 a $H(G)$, $H^2(G)$ es un grafo EV y $K^2(H^2(G)) = G$. Luego también vale la tercer inclusión. □

Corolario 4.10 $K(VV) = K^{-1}(bip)$ *y* $K(EV) = K^{-1}(bip)$.

Demostración: Sea $G \in VV$ entoces $K^2(G) = K(K(G))$ es bipartito, luego $K(G) \in K^{-1}(bip)$. Entonces $K(EV) \subseteq K(VV) \subseteq K^{-1}(bip)$. A su vez, sea $G \in K^{-1}(bip)$ entonces $H(G) \in EV$ y $G = K(H(G))$, por lo tanto $K^{-1}(bip) \subseteq K(EV) \subseteq K(VV) \subseteq K^{-1}(bip)$ con lo cual los tres conjuntos son iguales. □

Corolario 4.11 $K^{-1}(bip) \subseteq DEE$.

Demostración: Sea $G \in K^{-1}(bip)$. Supongamos que existe un conjunto impar $S = \{M_1, M_2, \ldots, M_{2k+1}\}$ de cliques de G, donde M_i interseca a M_{i+1} para $i = 1, \ldots, 2k$ y M_{2k+1} interseca a M_1. Los correspondientes vértices en $K(G)$ forman un ciclo impar, pero $K(G)$ es un grafo bipartito. Entonces no existe tal conjunto, y $G \in DEE$. □

Corolario 4.12 $K^{-1}(bip)$ *es una subclase de los grafos balanceados.*

Demostración: $K^{-1}(bip)$ es una subclase de los dualmente EE, que son balanceados. □

Observación 4.5 *La clase de grafos $K^{-1}(bip)$ fue caracterizada por Protti en* [100], *y es la clase de grafos que no contiene como subgrafo inducido ni ciclos inducidos impares de longitud mayor ó igual que* 5, *ni los grafos F_4, W_4 y $K_{1,3}$.*

Nota: En la figura 4.5, podemos ver que todas las inclusiones son estrictas.

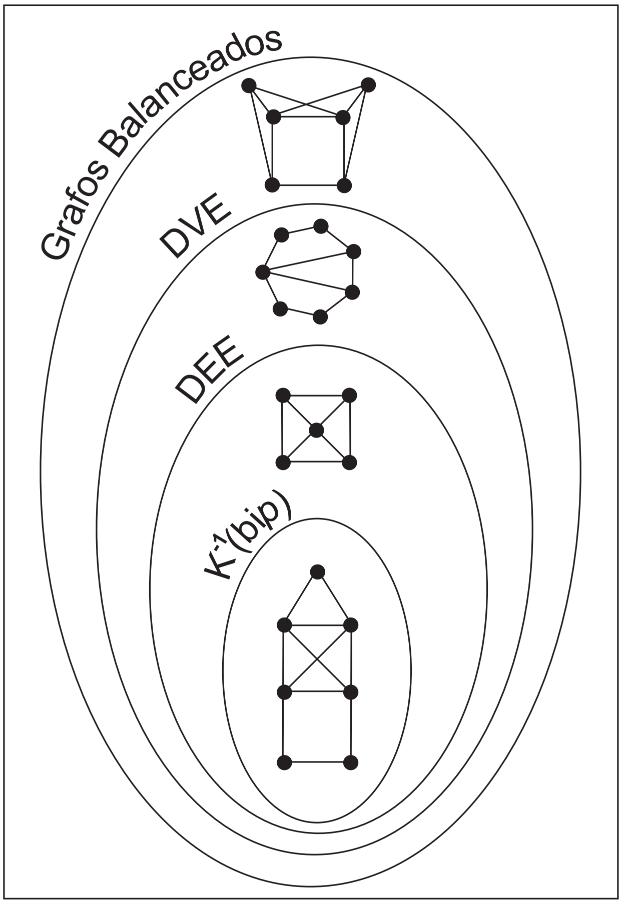


Figura 4.5: Inclusión entre las clases

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

A lo largo de esta tesis hemos trabajado en cuatro áreas: grafos balanceados, grafos clique, variantes de los grafos perfectos y problemas algorítmicos relacionados con la teoría de grafos perfectos.

Definimos la clase de grafos balanceados como aquellos grafos cuya matriz clique es balanceada. Demostramos que tienen un algoritmo de reconocimiento en tiempo polinomial y dimos una caracterización basada en propiedades de sus ciclos impares, y otra caracterización basada en propiedades de sus cliques. Vimos que pertenecen a varias clases conocidas de grafos: son clique-Helly hereditarios, perfectos, clique-perfectos, coordinados, K-perfectos, coordinados$_c$ y clique-perfectos$_c$. También probamos que varias clases conocidas de grafos son balanceadas, tal es el caso de los grafos totalmente unimodulares, trivialmente perfectos, bipartitos, fuertemente cordales, y a su vez definimos seis nuevas subclases de los grafos balanceados: cuatro de ellas (VV, VE, EE y EV) en base a propiedades de sus ciclos impares y dos de ellas (DVE y DEE) en base a propiedades de sus cliques. Estudiamos relaciones de inclusión y hallamos ejemplos de grafos en las intersecciones formadas por estas subclases.

En el área de los grafos clique, caracterizamos la clase de grafos clique de los grafos balanceados y las seis subclases definidas, los grafos totalmente unimodulares, los grafos trivialmente perfectos, y otras dos subclases de grafos perfectos: los perfectos y clique-Helly y los perfectos y clique-Helly hereditarios. Entre ellas hallamos algunas clases fijas y algunos pares de clases clique-duales distintas, que pueden verse en la tabla 5.1.

En el área de grafos perfectos y sus variantes, avanzamos en el estudio de la clase de grafos coordinados demostrando que los grafos coordinados son Berge, lo cual nos lleva a conjeturar que son perfectos.

En el área de complejidad computacional, analizamos los problemas de decisión asociados a los siguientes problemas de optimización: clique máxima, cantidad máxima de cliques por vértice, número cromático, partición mínima de las cliques en conjuntos independientes, conjunto independiente máximo, conjunto independiente de cliques máximo, cubrimiento mínimo de cliques

Clase $\mathcal{A}$	$K(\mathcal{A})$
Balanceados	Balanceados
DEE	EE
DVE	VE
EE	DEE
EV	K^{-1}(bipartitos)
K-perfectos ∩ Clique-Helly	Perfectos ∩ Clique-Helly
K-perfectos ∩ Clique-Helly hereditarios	Perfectos ∩ Clique-Helly hereditarios
Perfectos ∩ Clique-Helly	K-perfectos ∩ Clique-Helly
Perfectos ∩ Clique-Helly hereditarios	K-perfectos ∩ Clique-Helly hereditarios
Totalmente Unimodulares	Totalmente Unimodulares
Trivialmente Perfectos	Completos
VE	DVE
VV	K^{-1}(bipartitos)

Tabla 5.1: Clases de grafos clique caracterizadas en esta tesis

por vértices y cubrimiento mínimo de vértices por cliques, abordados en la clase de grafos clique-Helly hereditarios y en la clase de grafos balanceados. Estudiamos también la complejidad de los problemas de cantidad máxima de cliques por vértice y partición mínima de las cliques en conjuntos independientes con respecto a la clase #P. Los resultados obtenidos pueden observarse en la tabla 5.2. En negrita aparecen los resultados originales de esta tesis.

Problema	caso general	CHH	balanceados
$\alpha(G)$	NP-completo	**NP-completo**	**P**
$k(G)$	NP-completo	**NP-completo**	**P**
$\omega(G)$	NP-completo	**P**	**P**
$\chi(G)$	NP-completo	**NP-completo**	**P**
$\alpha_C(G)$	NP-completo	**NP-completo**	**P**
$\tau_C(G)$	NP-hard	**NP-completo**	**P**
$M(G)$	**#P-completo**	**P**	**P**
$F(G)$	**{#P,NP}-hard**	**NP-completo**	**P**

Tabla 5.2: Tabla de complejidades

Como trabajo futuro queda por estudiar la clase de *grafos ideales*, grafos cuya matriz clique es ideal. La relación probada por Chvátal entre matrices perfectas y grafos perfectos nos lleva a pensar que se pueden encontrar resultados similares que relacionen grafos clique-perfectos con ideales.
A su vez, queda por analizar el comportamiento de otros operadores en grafos aplicados a las clases de grafos estudiadas, viendo qué tipo de operaciones son cerradas en cada clase. Gran parte de este trabajo está hecho para la clase de grafos perfectos.
También intentaremos buscar para otros operadores Φ, no necesariamente unarios, la relación entre la matriz clique de $\Phi(G_1, \ldots, G_r)$ y las matrices clique de los grafos $G_1, \ldots, G_r$, esperando obtener en algunos casos resulta-

dos similares a los obtenidos para K y H.
Por último, seguiremos trabajando en la conjetura sobre la caracterización de los grafos clique-perfectos por medio de subgrafos prohibidos e intentaremos dar una caracterización de los grafos coordinados mediante subgrafos prohibidos.

Bibliografía

[1] T. Andrae, *Covering all cliques of a graph*, Discrete Math. 86 (1990), 117–126.

[2] T. Andrae and C. Flotow, *On covering all cliques of chordal graphs*, Discrete Math. 149 (1996), 299–302.

[3] T. Andrae, M. Schughart and Z. Tuza, *Clique Transversal set of line graphs and complements of line graphs*, Discrete Math. 88 (1991), 11–20.

[4] V. Balachandhran, P. Nagavamsi and C. Pandu Rangan, *Clique-transversal and clique-independence on comparability graphs*, Information Processing Letters 58 (1996), 181–184.

[5] E. Balas and C. Yu, *On graphs with polynomially solvable maximum-weight clique problem*, Networks 19 (1989), 247–253.

[6] H. Bandelt and E. Prisner, *Clique graphs and Helly graphs*, J. Combin. Theory B 51 (1991), 34–45.

[7] V. Barré and J. Fouquet, *On minimal imperfect graphs with no induced* P_5, manuscrito, Université du Maine, Le Mans (1996).

[8] M. Bazaraa and J. Jarvis, *Linear Programming and Network Flows* (John Willey & Sons, 1977).

[9] C. Berge, *Les problemes de colorations en théorie des graphes*, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 9 (1960), 123–160.

[10] C. Berge, *Färbung von, deren sämtichle bzw. deren ungerade Kreise starr sind*, Wiss. Zeitschr. Martin Luther Univ. Halle Wittenberg 10 (1961), 114–115.

[11] C. Berge, *Graphs* (North-Holland, 1985).

[12] N. Biggs, E. Keith Lloyd and R. Wilson, *Graph Theory 1736–1976* (Clarendon Press, 1978).

[13] F. Bonomo, G. Durán and M. Groshaus, *On clique-perfect, K-perfect and coordinated graphs*, en preparación.

[14] F. Bonomo, G. Durán, M. Lin and J. Swarcfiter, *On some properties of balanced graphs*, en preparación.

[15] C. Bornstein and J. Szwarcfiter, *Clique graphs of chordal and path graphs*, SIAM J. Discrete Math. 38 (1971), 535–545.

[16] C. Bornstein and J. Szwarcfiter, *On clique convergent graphs*, Graphs and Combinatorics 11 (1995), 213–220.

[17] A. Brandstadt, V. Bang Le and J. Spinrad, *Graph Classes: A Survey* (SIAM, 1999).

[18] A. Brandstadt, V. Chepoi, F. Dragan and V. Voloshin, *Dually chordal graphs*, SIAM J. Discrete Math. 11 (1999), 437–455.

[19] M. Buckingham and M. Golumbic, *Partitionable graphs, circle graphs and the strong perfect graph conjecture*, Ann. Discrete Math. 44 (1983), 45–54.

[20] M. Buckingham and M. Golumbic, *Recent results on the strong perfect graph conjecture*, Ann. Discrete Math. 20 (1984), 75–82.

[21] L. Cai and G. Corneil, *A generalization of perfect graphs: i-perfect graphs*, J. Graph Theory Math. 23 (1996), 87–103.

[22] K. Cameron and J. Edmons, *Lambda decomposition*, J. Graph Theory 26 (1997), 9–16.

[23] M. Chang, M. Farber and Z. Tuza, *Algorithmic aspects of neighbourhood numbers*, SIAM J. Discrete Math. 6 (1993), 24–29.

[24] L. Chong-Keang and P. Yee-Hock, *On graphs without multicliqual edges*, J. Graph Theory 5 (1981), 443–451.

[25] V. Chvátal, *Linear Programming* (Freeman, 1983).

[26] V. Chvátal, *On certain polytopes associated with graphs*, J. Combin. Theory B 18 (1975), 138–154.

[27] V. Chvátal and N. Sbihi, *Bull-free Berge graphs are perfect*, Graph Combin. 3 (1987), 127–139.

[28] M. Conforti, *(K_4-e)-free graphs and star cutsets*, Lecture Notes in Math. 1403 (1989), 236–253.

[29] M. Conforti, G. Cornuéjols and R. Rao, *Decomposition of balanced matrices*, J. Combin. Theory B 77 (1999), 292–406.

[30] M. Conforti, G. Cornuéjols and K. Vušković, *Square-free perfect graphs*, manuscrito (2001).

[31] S. Cook, *The complexity of theorem-proving procedures*, Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing Machinery, New York (1971), 151–158.

[32] G. Cornuéjols, *Combinatorial Optimization: packing and covering* (SIAM, Philadelphia, 2001).

[33] G. Cornuéjols and L. Zuluaga, *On Padberg's Conjecture about Almost Totally Unimodular Matrices*, Operations Research Letters 27 (2000), 97–99.

[34] D. Cvetkovic, M. Doob, I. Gutman and A. Torgasv, *Recenly Results in Theory of Graph Spectra*, Discrete Math. 36, North Holland, Amsterdam (1988).

[35] C. Deng and C. Lim, *A class of clique-closed graphs*, Discrete Math. 127 (1994), 131–137.

[36] P. Dietz, *Graph Descompositions. A Study in Infinite graph Theory* (Clarendon Press, Oxford, 1990).

[37] G. Durán, *Sobre grafos intersección de arcos y cuerdas en un círculo*, Tesis Doctoral, Departamento de Computación, FCEyN-UBA (2000).

[38] G. Durán and M. Lin, *Clique graphs of Helly circular-arc graphs*, Ars Combinatoria 60 (2001), 255–271.

[39] G. Durán, M. Lin and J. Szwarcfiter, *On clique-transversal and clique-independent sets*, enviado para su publicación.

[40] G. Ehrlich, S. Even and R. Tarjan, *Intersection graphs of curves in the plane*, J. Combin. Theory B 21 (1976), 8–20.

[41] P. Erdos, T. Gallai and Z. Tuza, *Covering the cliques of a graph with vertices*, Discrete Math. 108 (1992), 279–289.

[42] F. Escalante, *Uber iterierte Clique-Graphen*, Abhandlungender Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 39 (1973), 59–68.

[43] S. Even, A. Pnueli and A. Lempel, *Permutation graphs and transitive graphs*, Journal of the ACM Vol. 19 N. 3 (1972), 400–410.

[44] D. Fulkerson, *Antiblocking polyhedra*, J. Combin. Theory 12 (1972), 50–71.

[45] D. Fulkerson, *Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra*, Math. Programming 1 (1971), 168–194.

[46] D. Fulkerson, *On the perfect graph theorem*, Math. Programming T. Hu, S. Robinson eds., Academic Press, New York (1973), 69–76.

[47] D. Fulkerson, *The perfect graph conjecture and pluperfect graph theorem*, 2nd Chapel Hill Conf. on Combin. Math. and its Apl. (1969), 171–175.

[48] D. Fulkerson, A. Hoffman and R. Oppenheim, *On balanced matrices*, Math. Programming 1 (1974), 120–132.

[49] D. Gale, H. Kuhn and A. Tucker, *Linear programming and the theory of games*, in Activity Analysis of Production and Allocation, T. Koopmans, ed. New York, John Wiley & Sons (1951), 317–329.

[50] M. Garey and D. Jonhson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman and Company, San Francisco, 1979).

[51] M. Garey, D. Jonhson and L. Stockmeyer, *Some simplified NP-complete graph problems*, Theoretical Computer Science Vol. 1 N. 3 (1976), 237–267.

[52] M. Garey, D. Johnson, G. Miller and C. Papadimitriou, *The complexity of coloring circular arcs and chords*, SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 1 (1980), 216–227.

[53] F. Gavril, *Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques and maximum independent set of a chordal graph*, SIAM J. Comp. Vol. 1 N. 2 (1972), 180–187.

[54] F. Gavril, *Algorithms for a maximum clique and a maximum independent set of a circle graph*, Networks 3 (1973), 261–273.

[55] F. Gavril, *Algorithms on circular-arc graphs*, Networks 4 (1974), 357–369.

[56] M. Golumbic, *Algorithm Graph Theory and Perfect Graphs* (Academic Press, New York, 1980).

[57] M. Golumbic, *Comparability graphs and a new matroid*, J. Combin. Theory B 22 (1977), 68–90.

[58] C. Grinstad, *The strong perfect graph conjecture for a class of graphs*, Ph.D. thesis, UCLA 25 (1978).

[59] M. Groshaus, *Sobre grafos perfectos, clique-perfectos, K-perfectos y coordinados*, Tesis de Licenciatura, Departamento de Matemática, FCEyN-UBA (2001).

[60] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, *The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization*, Combinatorica 1 (1981), 169–197.

[61] V. Guruswami and C. Pandu Rangan, *Algorithmic aspects of clique-transversal and clique-independent sets*, Discrete App. Math. 100 (2000), 183–202.

[62] V. Gurvich and S. Hougardy, *Partitionable graphs*, manuscrito (1996).

[63] M. Gutiérrez, *Tree-clique graphs*, In J. Szwarcfiter, editor, Workshop International de Combinatória, Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro (1996), 7–26.

[64] M. Gutiérrez and J. Meidanis, *Recognizing clique graphs of directed edge path graphs*, manuscrito.

[65] M. Gutiérrez and L. Oubiña, *Minimun proper interval graph*, Discrete Math. 142 (1995), 77–85.

[66] M. Gutiérrez and R. Zucchello, *Grafos ACI: Una generalización de los grafos de intervalos propios*, manuscrito.

[67] A. Gyarfas, *Problems from the world surrounding perfect graphs*, Zastosow Mat 19 (1987), 413–441.

[68] R. Hamelink, *A partial characterization of clique graphs*, J. Combin. Theory B 5 (1968), 192–197.

[69] F. Harary, *Graph Theory* (Addison-Wesley, 1969).

[70] S. Hedetniemi and P. Slater, *Line graphs of triangleless graphs and iterated clique graphs*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag (1972) 139–147.

[71] B. Hedman, *Clique graphs of time graphs*, J. Combin. Theory B 37 (1984), 270–278.

[72] W. Hsu, *How to color claw-free perfect graphs*, Ann. Discrete Math. 11 (1981), 189–197.

[73] D. Johnson, *The NP-completeness column: an ongoing guide*, Journal of Algorithms 6 (1985), 434–451.

[74] J. Johnson and J. Spinrad, *Brittle, bipolarizable, y P_4-simplicial graph recognition*, manuscrito (1999).

[75] R. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, In R. Miller and J. Thatcher (eds.), Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York (1972), 85–103.

[76] L. Khachian, *A polynomial algorithm in linear programming*, Soviet Math. Dokl. 20 (1979), 191–194.

[77] C. Lam, S. Swiercz, L. Thiel and E. Regener, *A computer search for (α,ω)-graphs*, Congres. Numer. 27 (1979), 285–289.

[78] F. Larrión and V. Neumann-Lara, *On clique divergent graphs with linear growth*, manuscrito.

[79] V. Le, *Perfect k-line graphs and k-total graphs*, J. Graph Theory 17 (1993), 65–73.

[80] M. Lin, *Grafos self-clique y otras clases de grafos clique*, Tesis Doctoral, Departamento de Computación, FCEyN-UBA (2001).

[81] L. Lovász, *A characterization of perfect graphs and the perfcect graph conjecture*, J. Combin. Theory B 132 (1972), 95–98.

[82] L. Lovász, *Normal hipergraphs and the perfect graph conjecture*, Discrete Math. 2 (1972), 253–267.

[83] F. Maffray and M. Preissmann, *Perfect graphs with no P_5 and no K_5*, Graphs Combin. 10 (1994), 179–184.

[84] F. Maffray and M. Preissmann, *Split-neighbourhood graphs and the strong perfect graph conjecture*, J. Combin. Theory B 63 (1995), 294–309.

[85] F. Maffray, O. Porto and M. Preissmann, *A generalization of simplicial elimination orderings*, Journal of Graph Theory 23 2 (1996), 203–208.

[86] T. McKee and F. McMorris, *Topics in Intersection Graph Theory* (SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 1999).

[87] S. Mera, *Problemas en grafos intersección y overlap de arcos alrededor de un círculo*, Tesis de Licenciatura, Departamento de Computación, FCEyN-UBA (2001).

[88] H. Meyniel, *A new property of critical imperfect graphs and some consequences*, European J. Combin. 8 (1987), 313–316.

[89] J. Mycielski, *Sur le coloriage des graphs*, Colloq. Mat. 3 (1955), 161–162.

[90] G. Nemhauser and L. Wosley, *Integer and Combinatorial Optimization* (John Willey & Sons, 1988).

[91] S. Olariu, *On the strong perfect graph conjecture*, J. Graph Theory 12 (1988), 169–176.

[92] C. Papadimitriou, *Computational Complexity* (Addison-Wesley, 1994).

[93] K. Parthasarathy and G. Ravindra, *The strong perfect graph conjecture is true for $K_{1,3}$-free graphs*, J. Combin. Theory 21 (1976), 212–223.

[94] S. Poljak, *A note on stable sets and colorings of graphs*, Comment. Math. Univ. Carolin. 15 (1974), 307–309.

[95] E. Prisner, *Graphs Dynamics*, Pitman Research Notes in Mathematics 338, Longman (1995).

[96] E. Prisner, *Graphs with few cliques*, In Y. Alavi and A. Schwenk (eds.), Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proceedings of the 7th. Quadrennial International Conference on the Theory and Applications (John Wiley and Sons, 1995), 945–956.

[97] E. Prisner, *Hereditary clique-Helly graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput. 14 (1993), 216–220.

[98] E. Prisner and J. Szwarcfiter, *Recognizing clique graphs of directed and root path graphs*, Discrete App. Math. 94 (1999), 321–328.

[99] H. Prömel and A. Steger, *Almost all berge graph are perfect*, Combin. Probab. Comput. 1 (1992), 53–79.

[100] F. Protti and J. Swarcfiter, *Clique-inverse graphs of bipartite graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput. (2001), to appear.

[101] S. Rao and G. Ravindra, *A characterization of perfect total graph*, J. Math. Phys. Sci. 11 (1977), 25–26.

[102] F. Roberts and J. Spencer, *A characterization of clique graphs*, J. Combin. Theory 10 (1971), 102–108.

[103] J. Sabia and S. Tesauri, *Sucesiones recursivas lineales*, Notas de Matemática 5, Departamento de Matemática, FCEyN-UBA (1997).

[104] A. Sassano, *Chair free Berge graphs are perfect*, Graphs Combin. 13 (1997), 369–395.

[105] D. Seinsche, *On a property of the class of n-colorable graphs*, J. Combin. Theory B 16 (1974), 191–193.

[106] J. Simon, *On some central problems in computational complexity*, Ph.D. Thesis, Cornell University (1977).

[107] L. Sun, *Two classes of perfect graphs*, J. Combin. Theory B 53 (1991), 273–291.

[108] J. Szwarcfiter, *Recognizing clique-Helly graphs*, Ars Combinatoria 45 (1997), 29–32.

[109] J. Szwarcfiter, *A survey on clique graphs*, Brazilian Summer School on Combinatorics and Algorithms, Fortaleza, Brasil (2001), 103–132.

[110] S. Tsukiyama, M. Idle, H. Ariyoshi and Y. Shirakawa, *A new algorithm for generating all the maximal independent sets*, SIAM Journal on Computing Vol. 6. N. 3 (1977), 505–517.

[111] A. Tucker, *A reduction procedure for coloring perfect K_4-free graphs*, J. Combin. Theory B 43 (1987), 151–172.

[112] A. Tucker, *Coloring a family of circular arcs*, SIAM Journal Appl. Math. 29 (1975), 493–502.

[113] A. Tucker, *Coloring (K_4-e)-free graphs*, J. Combin. Theory B 42 (1987), 313–318.

[114] A. Tucker, *Critical perfect graphs and perfect 3-chromatic*, J. Combin. Theory B 23 (1977), 143–149.

[115] A. Tucker, *The strong perfect graph conjecture for planar graphs*, Canad. J. Math. 25 (1973), 103–114.

[116] A. Tucker, *The validity of the strong perfect graph cojecture for K_4-free graphs*, Ann. Discrete Math. 21 (1984), 149–158.

[117] Z. Tuza, *Covering all cliques of a graph*, Discrete Math. 86 (1990), 117–126.

[118] L. Valiant, *The complexity of computing the permanent*, Theoretical Computer Science 8 (1979), 189–201.

[119] L. Valiant, *The complexity of enumeration and reliability problems*, SIAM Journal on Computing Vol. 8. N. 3 (1979), 410–421.

[120] S. Wagon, *A bound on the chromatic number of graphs without certain induced subgraphs*, J. Combin. Theory B 29 (1980), 345–346.

[121] E. Wolk, *The comparability graph of a tree*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 17–20.

Sobre grafos