Un modelo de asignación de árbitros para el torneo de fútbol chileno y un enfoque de resolución en base a patrones

Fernando Alarcón*
Guillermo Durán*
Mario Guajardo*

Resumen

La asignación de árbitros en campeonatos deportivos es una tarea que, en instancias reales, generalmente conlleva a un problema de decisión combinatorial de difícil resolución. En la práctica, la asignación suele ser realizada en forma manual por una comisión experta, en base a criterios poco estructurados. Recientemente, diversas técnicas del Sports Scheduling *se han abocado a mejorar esta situación, desarrollando modelos y comparando enfoques de resolución.*

En este artículo estudiamos el problema de asignación de árbitros para el campeonato de la Primera División del fútbol chileno y lo abordamos mediante un modelo de optimización lineal entera. El modelo logra capturar criterios que otorgan transparencia y objetividad a la asignación, por ejemplo, balanceando la cantidad de partidos dirigidos por cada árbitro y sus distancias de viaje, y tomando en cuenta su categoría para arbitrar partidos especiales. Para su resolución, proponemos un enfoque basado en la construcción de patrones, inspirados en el enfoque de patrones de localía utilizado exitosamente en la programación del fixture de varias ligas deportivas alrededor del mundo. Según nuestro conocimiento, este es el primer artículo que utiliza un enfoque similar para la asignación de árbitros a un torneo.

Implementamos el modelo para instancias reales del problema y desarrollamos una herramienta ágil para el usuario, reportando resultados que mejoran significativamente la asignación tradicional. Además, mediante el enfoque de patrones resolvemos el problema significativamente más rápido que la resolución directa de la formulación original.

Palabras clave: asignación de árbitros, fútbol, patrones, programación entera.

*Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

1. Introducción

La disciplina que estudia el diseño eficiente de campeonatos deportivos es conocida como *Sports Scheduling*. Uno de los temas de investigación de los cuales se ocupa corresponde a la asignación de los árbitros que dirigirán cada uno de los partidos de un torneo. Usualmente, estas decisiones generan un problema combinatorial que, según las dimensiones y restricciones de cada torneo, puede conllevar a un problema complejo, prácticamente imposible de resolver a mano.

El problema de asignación de árbitros fue reportado por primera vez en la literatura cuando Wright [14] propuso un modelo básico para asignar los árbitros de la liga de cricket de Inglaterra. Varios años más tarde, Dinitz y Stinson [4] discutieron el problema de asignación de árbitros a un torneo programado previamente, utilizando determinados tipos de Room Squares. Trick y Yildiz [12] definieron un problema similar al bien conocido *Traveling Tournament Problem* (Easton et al. [7]), pero minimizando la distancia total a recorrer por los árbitros en vez de equipos y lo llamaron *Traveling Umpire Problem* (TUP). Más tarde, Duarte et al. [5] le dieron otro enfoque al problema y definieron el *Referee Assignment Problem* (RAP) enfocado en la asignación eficiente de árbitros a partidos de una liga deportiva, minimizando la suma sobre todos los árbitros de la diferencia entre los partidos que se quiere que dirija un árbitro y los que finalmente le son asignados.

Por otra parte, Gil y Rojas [8] propusieron un método de asignación que utiliza intervalos de confianza para representar la información considerando el grado de incertidumbre existente (dado que la experiencia y el nivel de cada árbitro es una cuestión subjetiva, los autores de este trabajo resuelven esta situación incorporando la incertidumbre al modelo).

Recientemente, Yavuz et al. [13] presentaron un modelo que busca la asignación justa de árbitros, considerando principalmente la frecuencia con que un árbitro es asignado a dirigir al mismo equipo.

En este artículo presentamos un modelo de optimización lineal entera para el problema de asignación de árbitros, en el marco del campeonato de la Primera División del fútbol chileno y un enfoque para resolverlo. En la Sección 2, describimos el contexto en que se origina el problema y en la Sección 3, desarrollamos un modelo que lo aborda. En la Sección 4, presentamos un enfoque de resolución en base a patrones. Finalmente, exponemos los resultados de nuestra implementación y las conclusiones en las secciones 5 y 6, respectivamente.

2. El Contexto Chileno

El torneo más importante del fútbol profesional chileno es el de Primera División, organizado por la Asociación Nacional de Fútbol Profesional de Chile (ANFP). Una de las tareas a cargo de la ANFP es la asignación de árbitros a los partidos del torneo. Para esto, existe una Comisión Arbitral compuesta por expertos, usualmente ex-árbitros que alguna vez dirigieron en el fútbol profesional chileno y ahora realizan esta labor organizativa. La Comisión realiza esta asignación semana a semana, basada en criterios poco estructurados y completamente a mano, sin herramientas de decisión sofisticadas. Como consecuencia de esto, la asignación resultante presenta varias desventajas. Por ejemplo, algunos árbitros dirigen una cantidad de partidos significativamente mayor a otros a lo largo del torneo, aun en el caso que su experiencia y trayectoria en el referato profesional sean similares. También a menudo sucede que un árbitro dirige una alta cantidad relativa de partidos a un mismo club; otros por el contrario, nunca dirigen a ciertos equipos. Adicionalmente, dado el carácter particular de la geografía chilena, una asigación defectuosa puede conducir a que algunos árbitros viajen una distancia total por torneo considerablemente mayor a la de otros.

Este tipo de factores dan cuenta de la relevancia de realizar una asignación correcta de los árbitros a los partidos del torneo. Aun más, no es extraño observar disconformidad de jugadores, dirigencias e hinchas sobre el desempeño de los árbitros que dirigen sus partidos. Esto a la vez genera presiones adicionales a la tarea de los árbitros. Si bien estos problemas no son netamente atribuibles a la asignación, creemos que si esta tarea es realizada mediante un modelo de optimización con criterios objetivamente definidos, contribuiría a que la asignación sea más justa y transparente para todos los actores involucrados, y eleve el nivel de profesionalismo del torneo profesional chileno.

A este respecto, un antecedente importante de aplicación de programación lineal entera en el fútbol chileno es reportado en [6], donde se desarrolla un modelo de optimización para la confección del fixture del torneo de Primera División. El modelo desarrollado ha logrado un impacto importante desde que fue implementado por primera vez en 2005, y se sigue utilizando hasta la fecha, extendiéndose su aplicación a partir de 2007 a la Segunda División. Mayores detalles sobre la estructura del campeonato chileno pueden ser consultadas en dicho trabajo. En la siguiente sección desarrollamos un modelo para la asignación de árbitros de este torneo.

3. Modelo de Programación Entera

En base a la revisión de literatura, al análisis de asignaciones de árbitros en torneos anteriores y a conversaciones con la dirigencia de la ANFP y su Comisión Arbitral, hemos definido las condiciones que una programación de árbitros apropiada para este campeonato debe cumplir.

El modelo desarrollado toma ideas de diferentes trabajos pero es diferente a otros similares conocidos en la literatura.

El fixture del torneo se asume conocido de antemano. La asignación resultante debe establecer qué árbitro dirigirá cada uno de los partidos y debe estar disponible antes que el torneo comience. En la práctica, a medida que el torneo avanza, esta podría sufrir algunas modificaciones de acuerdo a situaciones coyunturales que, por ejemplo, afecten la disponibilidad de ciertos árbitros.

Cabe mencionar que en el fútbol se necesita un árbitro y dos asistentes. Al inicio de cada temporada, las ligas generalmente definen ternas arbitrales cuya composición no varía durante el torneo. En lo que sigue, hablaremos entonces de "árbitro" en forma singular, entendiendo que la asignación puede también corresponder a un árbitro y a los dos asistentes que completen su terna arbitral.

El problema lo abordamos mediante un modelo de optimización lineal entera, que presentamos a continuación.

- **Conjuntos y Parámetros**

  P: Conjunto de partidos.

  A: Conjunto de árbitros.

  E: Conjunto de equipos.

  F: Conjunto de fechas.

  $SIFIJO(a,p)$: Conjunto de pares (a,p) tal que se fija de antemano que el árbitro a debe dirigir el partido p.

  $NOFIJO(a,p)$: Conjunto de pares (a,p) tal que se fija de antemano que el árbitro a no puede dirigir el partido p.

  $PN(p)$: Subconjunto de partidos que requieren la máxima categoría de árbitro.

  C^a: Categoría del árbitro a.

  N^p: Mínima categoría de árbitro requerida para dirigir el partido p.

  $$fechas^{p,f} = \begin{cases} 1 & \text{si el partido } p \text{ se juega en la fecha } f \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$juega^{p,e} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } e \text{ juega en el partido } p \\ 0 & \sim \end{cases}$

$DIST^{a,p}$: distancia (ida y vuelta) entre la localidad considerada como origen para el árbitro a y la localidad de realización del partido p, medida en kilómetros.

T^a: Meta de partidos a ser asignados para dirigir por el árbitro a.

$MINT^a$: Mínima cantidad total de partidos a ser asignados al árbitro a.

$MAXT^a$: Máxima cantidad total de partidos a ser asignados al árbitro a.

$MINP^{a,e}$: Mínima cantidad de incidencias entre el árbitro a y el equipo e.

$MAXP^{a,e}$: Máxima cantidad de incidencias entre el árbitro a y el equipo e.

$DISTMAX$: Máxima diferencia permitida entre las distancias promedio por partido a recorrer por un árbitro y otro.

S^a: Máxima cantidad de fechas consecutivas que pueden pasar sin que el árbitro a sea asignado a dirigir un partido.

- **Variables**

  $x_{a,p} = \begin{cases} 1 & \text{si el árbitro } a \text{ es asignado para dirigir el partido } p \\ 0 & \sim \end{cases}$

  dif_a = Diferencia entre la meta predefinida de partidos a dirigir por el árbitro a y la cantidad de partidos efectivamente asignados.

- **Restricciones y Función Objetivo**

  Restricciones básicas. Cada partido necesita un y sólo un árbitro principal para ser dirigido.

  $$\sum_{a=1}^{|A|} x_{a,p} = 1 \qquad \forall\, p \in P. \tag{1}$$

  Restricciones de fecha por árbitro. Cada árbitro puede ser asignado como máximo una sola vez por fecha.

  $$\sum_{p=1}^{|P|} fechas^{p,f} \cdot x_{a,p} \leq 1 \qquad \forall\, a \in A,\ f \in F. \tag{2}$$

  Categoría de árbitros y nivel de partidos. En base a la rivalidad histórica o a la expectativa que generan, algunos partidos requieren ser dirigidos por árbitros de mayor experiencia o categoría. Para esta restricción, se establecen dentro de un mismo rango, números naturales que representan niveles de los partidos y categorías de los árbitros. En este rango, el número más bajo representa mejor nivel o mayor categoría, mientras que el número más alto representa peor nivel o menor categoría. El número de niveles y categorías a utilizar depende de cómo se defina la instancia. Agregamos entonces la siguiente restricción:

$$C^a \cdot x_{a,p} \leq N^p \qquad \forall\, a \in A,\ p \in P. \tag{3}$$

Además, dependiendo del número de partidos clasificados dentro del mejor nivel y de la frecuencia con que estén programados en una determinada cantidad consecutiva de fechas, se requiere que no se repitan los mismos árbitros en dos de este tipo de partidos consecutivos, lo que se logra con la siguiente restricción:

$$x_{a,p} + x_{a,\hat{p}} \leq 1 \qquad \forall\, a \in A,\ p, \hat{p} \in PN(p). \tag{4}$$

($\hat{p}$ es el siguiente partido de mayor nivel, después de p.)

Partidos fijos. Un árbitro puede ser sancionado e impedírsele dirigir algún partido o puede no estar disponible para dirigir en cierta(s) fecha(s), por ejemplo, debido a una lesión. Para esto agregamos la siguiente restricción:

$$x_{a,p} = 0 \qquad \forall\, (a,p) \in NOFIJO. \tag{5}$$

También la Comisión Arbitral puede decidir que cierto árbitro deba dirigir determinado partido. Incorporamos esta condición como sigue:

$$x_{a,p} = 1 \qquad \forall\, (a,p) \in SIFIJO. \tag{6}$$

Restricciones de equidad sobre los equipos. Consideramos un número mínimo y máximo de incidencias entre los árbitros y los equipos.

$$\sum_{p=1}^{|P|} juega^{p,e} \cdot x_{a,p} \geq MINP^{a,e} \qquad \forall\, a \in A,\ e \in E. \tag{7}$$

$$\sum_{p=1}^{|P|} juega^{p,e} \cdot x_{a,p} \leq MAXP^{a,e} \qquad \forall\, a \in A,\ e \in E. \tag{8}$$

Restricciones de equidad sobre los árbitros. Imponemos un número mínimo y máximo de asignaciones para un mismo árbitro durante todo el campeonato.

$$\sum_{p=1}^{|P|} x_{a,p} \geq MINT^{a} \qquad \forall\, a \in A. \tag{9}$$

$$\sum_{p=1}^{|P|} x_{a,p} \leq MAXT^{a} \qquad \forall\, a \in A. \tag{10}$$

Además, el promedio de distancias recorridas por partido por los árbitros durante el campeonato deben ser similares y pueden estar acotadas.[1]

$$\frac{1}{T^{a}} \sum_{p=1}^{|P|} DIST^{a,p} \cdot x_{a,p} - \frac{1}{T^{r}} \sum_{p=1}^{|P|} DIST^{r,p} \cdot x_{r,p} \leq DISTMAX \quad \forall\, a, r \in A. \tag{11}$$

También consideramos una cantidad máxima de fechas en que los árbitros pueden permanecer sin dirigir.

$$\sum_{s=0}^{S^{a}} \sum_{p=1}^{|P|} fechas^{p,f+s} \cdot x_{a,p} \geq 1 \qquad \forall\, a \in A,\ f \leq |F| - S^{a}. \tag{12}$$

Restricciones lógicas y función objetivo. En general, a los árbitros se les paga por partidos dirigidos. Por esta razón, para cada árbitro se predefine una cantidad de partidos a dirigir como meta, que depende principalmente de su categoría. Tal como presentan Duarte et al. [5] en el RAP, nuestra función objetivo establece que la suma sobre todos los árbitros de la diferencia absoluta entre su meta y el número de partidos efectivamente asignados debe ser minimizada. Para lograr esto, incorporamos las siguientes restricciones:

$$\sum_{p=1}^{|P|} x_{a,p} + dif_{a} \geq T^{a} \qquad \forall\, a \in A. \tag{13}$$

$$\sum_{p=1}^{|P|} x_{a,p} - dif_{a} \leq T^{a} \qquad \forall\, a \in A. \tag{14}$$

[1] Esta desigualdad considera la distancia promedio por partido a recorrer por árbitro, siempre y cuando cada árbitro dirija un número de partidos igual a su meta, lo que no está asegurado *a priori*. Sin embargo, en la función objetivo intentaremos lograr que esto se cumpla, por lo cual consideramos que es una buena estimación con la que no se pierde la linealidad del problema.

Finalmente, presentamos la función objetivo según dicho criterio:

$$\text{mín}\, g = \sum_{a=1}^{|A|} dif_a \tag{15}$$

Nos referiremos a este modelo de asignación de árbitros al torneo chileno como MATCH.

4. El enfoque de patrones

En términos computacionales, la resolución de la formulación anterior puede ser difícil, debido a la dimensión y a la estructura combinatorial del problema. Por ejemplo, para un campeonato de 6 equipos y 4 árbitros disponibles para dirigir cada fecha, en que los equipos juegan todos contra todos en dos rondas (por lo que 3 de los 4 árbitros deben dirigir cada fecha), existen más de 63 billones de asignaciones posibles. Para el torneo de Primera División A del fútbol chileno, que actualmente cuenta con 18 equipos, 34 fechas de fase regular por año y alrededor de 15 árbitros, el número de alternativas posibles se hace prácticamente inimaginable.

El carácter combinatorial y el tamaño de los problemas del mundo real, suelen ser las principales dificultades en los problemas de *Sports Scheduling*. En la programación de fixtures, un enfoque que ha sido amplia y exitosamente utilizado en la literatura es el de generar estructuras que definen secuencias de localías para cada equipo, denominadas *patrones* (ver, por ejemplo, [1], [2], [3], [9], [10]). Luego de que éstos han sido construidos, son fijados a los equipos, para posteriormente definir el fixture propiamente tal.

Esta técnica suele disminuir significativamente el tiempo de resolución y conlleva a soluciones que, si bien no necesariamente son óptimas, presentan buen desempeño en la F.O. (posteriormente, procedimientos de búsqueda local pueden ser utilizados para mejorar su calidad, o procedimientos exactos pueden usar esta solución como punto de partida).

Una buena revisión al respecto y un resumen sobre las variadas maneras en que el enfoque de patrones es utilizado en la resolución de problemas de programación de fixtures de torneos deportivos, es entregada por Rasmussen y Trick [11].

Nos remitimos a explicar brevemente el enfoque en este contexto, tanto en la programación de fixtures como en la asignación de árbitros. En el primer caso, existen muchos trabajos en la literatura que abordan esta técnica. En el segundo caso, entendemos que es una novedad de este trabajo.

4.1. El enfoque de patrones en la programación de fixtures

Un patrón puede ser entendido como un arreglo ordenado de caracteres L y V, que denotan "Local" y "Visita", respectivamente. La dimensión del arreglo corresponde al número de fechas del torneo. Un patrón asignado a un equipo dado, indica en su componente n-ésima si dicho equipo juega de local o de visita en la fecha n.

$$P(\textit{equipo 1}) = (L, V, L, V, V)$$

Por ejemplo, el patrón P indica que el *equipo 1* juega de local la primera y la tercera fecha, y de visita las fechas 2, 4 y 5.

En la programación de fixtures, la literatura reporta distintas estrategias para generar estos arreglos. Por ejemplo, pueden ser construidos mediante reglas lógicas o mediante modelos de programación entera. Independiente de como sean construidos, su uso generalmente confluye en que son fijados a los equipos asegurando que las restricciones de secuencias de localías y otras condiciones particulares de cada problema se cumplan, para posteriormente correr el modelo original a partir de esta fijación (lo que permite eliminar una serie de restricciones) y obtener factibilidad en el resto de las restricciones. Las restricciones que se suele asegurar en el primer paso son aquellas que en la práctica otorgan mayor dificultad a la resolución de la formulación original del problema.

En problemas del mundo real, la disminución del tiempo de resolución mediante el uso de patrones suele ser significativa. Aún más, en varios casos es crucial para obtener soluciones factibles, pues conseguirlas corriendo la formulación original se hace impracticable.

Inspirados en esta idea, desarrollamos para el problema de la asignación de árbitros un modelo en base a patrones. Según nuestro conocimiento, a pesar de que ambas problemáticas han sido un tema de estudio de la misma disciplina, la literatura no reporta la resolución de este tipo de problemas mediante un enfoque similar.

4.2. Un enfoque de patrones para la asignación de árbitros

Lógicamente, los conceptos de "local" o "visita" no aplican para el caso de los árbitros. La variable que hemos definido para generar un patrón para un árbitro es en qué zona del país dirige en cada fecha. Para ello, segmentamos el país en tres zonas: *Norte* (N), *Centro* (C) y *Sur* (S). Clasificamos a cada equipo en una de estas zonas, de acuerdo a la ubicación geográfica en que juega de local.

Además, dado que el número de árbitros es mayor al número de partidos jugados en cada fecha, definimos un valor *Libre* (L) que denota cuándo el árbitro no es asignado para dirigir partidos. Luego, definimos un patrón para un árbitro como un arreglo ordenado de caracteres en $\{N,\ C,\ S,\ L\}$ y dimensión igual al número de fechas del torneo, por ejemplo:

$$Q(\textit{árbitro 1}) = (C, N, S, N, L, C, S, S, N)$$

El patrón Q indica que el *árbitro 1* debe arbitrar en el Norte en las fechas 2, 4 y 9; en el Centro, en las fechas 1 y 6; en el Sur, en las fechas 3, 7 y 8; y queda libre en la quinta fecha.

Enfatizamos que la segmentación de equipos puede ser hecha en base a criterios distintos del geográfico. Dada las particularidades del territorio chileno, hemos clasificado a los equipos de esta manera, pero en otros casos podría ser incluso hecha en forma aleatoria.

Dadas estas definiciones, desarrollamos un nueva metodología de resolución. Primero, formulamos un modelo que genera los patrones para cada árbitro, incorporando algunas de las restricciones del problema (las que *a priori* nos parecen más relevantes para efectos de la definición del conjunto de patrones). Luego, formulamos un segundo modelo que incorpora el resto de las restricciones y asigna definitivamente qué árbitro dirigirá cada partido.

4.2.1. Modelo para la generación de patrones

En este primer modelo, introducimos una familia de variables para construir los patrones y seleccionamos algunas de las restricciones del modelo original, capturándolas completa o parcialmente en la modelación.

Los conjuntos y parámetros que utilizamos del modelo anterior siguen teniendo el mismo significado y definimos otros adicionales.

- **Conjuntos y Parámetros adicionales**

  $K = \{N, C, S, L\}$: Conjunto de caracteres que denotan el cluster geográfico en que debe dirigir un árbitro o si queda libre.

  $PCluster(k, f)$: Número de partidos que se juegan en el cluster k durante la fecha f.

  $$AC_{a,Cat} = \begin{cases} 1 & \text{si el árbitro } a \text{ es de categoría } Cat \\ 0 & \sim \end{cases}$$

  (donde $Cat \in \{Alta, Media, Baja\}$).

  $PFC(k, f, Cat)$: Número de partidos de categoría Cat que se juegan en el cluster k durante la fecha k (donde $Cat \in \{Alta, Media, Baja\}$.)

  PAC: Conjunto de tuplas (a, k_1, k_2, f_1, f_2) tal que el árbitro a es de categoría *Alta*, en el cluster k_1 se juegan partidos de nivel *Alto* en la fecha f_1 y en el cluster k_2 se juegan partidos de nivel *Alto* en la fecha f_2 (siendo f_2 la primera fecha posterior a la fecha f_1 tal que hay partidos de nivel *Alto*).

$NOFIJO\_C$: Conjunto de tuplas (a, k, f) tal que el árbitro a no puede arbitrar en el cluster k en la fecha f.

$SIFIJO\_C$: Conjunto de tuplas (a, k, f) tal que el árbitro a debe arbitrar en el cluster k en la fecha f.

$$KJuega(e, k, f) = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } e \text{ juega en el cluster } k \text{ en la fecha } f \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$DClus(a, k)$: Distancia entre el lugar de origen del árbitro a y el promedio de la distancia de los equipos que juegan de local en el cluster k.

- **Variables**

$$z_{a,k,f} = \begin{cases} 1 & \text{si el patrón del árbitro } a \text{ indica que debe dirigir en el} \\ & \text{cluster } k \text{ en la fecha } f \\ 0 & \sim \end{cases}$$

dif_a = Diferencia entre la meta predefinida de partidos a dirigir por el árbitro a y la cantidad de partidos efectivamente asignados.

- **Restricciones y Función Objetivo**

Restricciones básicas sobre los patrones y el fixture. La suma del número de patrones que indican jugar en un cluster k en la fecha f debe ser igual a la suma de partidos que según el fixture se juegan en el cluster k en la fecha f.

$$\sum_{a} z_{a,k,f} = PCluster(k, f) \qquad \forall\, k \in K,\ f \in F. \tag{16}$$

Esta familia de restricciones es similar a las restricciones (1) del modelo MATCH, ahora en el contexto de las variables z.

Restricciones de fecha por árbitro. En toda fecha, un árbitro debe ser asignado a dirigir en algún cluster geográfico o quedar libre.

$$\sum_{k \in K} z_{a,k,f} = 1 \qquad \forall\, a \in A,\ f \in F. \tag{17}$$

Esta familia de restricciones es análoga a las restricciones (2) del modelo MATCH.

Categoría de partidos y nivel de partidos. Intentando capturar las restricciones (3) del modelo MATCH, imponemos que la suma del número de patrones asignados a los árbitros de categoría *Alta* que arbitran en el cluster k en la fecha f correspondan al número de partidos que demandan esta categoría de árbitros jugados en el cluster k en la fecha f.

$$\sum_{a} AC_{a,Alta} \cdot z_{a,k,f} \geq PFC(k,f,Alta) \qquad \forall\, k \in K,\ f \in F. \tag{18}$$

Del mismo modo, imponemos esta condición para los partidos que demandan árbitros de calidad al menos *Media* (lógicamente, un árbitro de categoría *Alta* también puede arbitrar estos partidos).

$$\sum_{a}(AC_{a,Alta}+AC_{a,Media})\cdot z_{a,k,f} \geq PFC(k,f,Alta)+PFC(k,f,Media)$$
$$\forall\, k \in K,\ f \in F. \tag{19}$$

Adicionalmente, para asegurar que se cumplan las restricciones (4) del modelo MATCH, imponemos que si un árbitro dirigió un partido de *Alta* categoría en una fecha dada, en la fecha siguiente en que hay partidos de nivel *Alto* no dirija en el cluster en que estos se juegan.

$$z_{a,k_1,f_1} + z_{a,k_2,f_2} \leq 1 \qquad \forall\, (a,k_1,k_2,f_1,f_2) \in PAC. \tag{20}$$

Partidos fijos. Intentamos capturar las restricciones (5) del MATCH, imponiendo que el árbitro no dirija en el cluster correspondiente:

$$z_{a,k,f} = 0 \qquad \forall\, (a,k,f) \in NOFIJO\_C. \tag{21}$$

Análogamente, para las restricciones (6), imponemos que el árbitro dirija en el cluster al que pertenece el equipo que juega de local:

$$z_{a,k,f} = 1 \qquad \forall\, (a,k,f) \in SIFIJO\_C. \tag{22}$$

Restricciones de equidad sobre los equipos. Intentando capturar parcialmente las incidencias entre árbitros y equipos consideradas en las restricciones (7) del modelo MATCH, imponemos una cota mínima al número de veces que cada patrón es asignado al cluster donde juega cada equipo.

$$\sum_{k,f} z_{a,k,f} \cdot KJuega(e,k,f) \geq MINP^{a,e} \qquad \forall\, a \in A,\ e \in E. \tag{23}$$

Restricciones de equidad sobre los árbitros. Tal como impusimos las restricciones (9) y (10) en el modelo MATCH, fijamos cotas para el número mínimo y máximo de partidos que cada árbitro debe dirigir en el torneo.

$$\sum_{f,k} z_{a,k,f} \geq MINT^a \qquad \forall\, a \in A,\ k \in \{N, C, S\}. \tag{24}$$

$$\sum_{f,k} z_{a,k,f} \leq MAXT^a \qquad \forall\, a \in A,\ k \in \{N, C, S\}. \tag{25}$$

Intentando capturar el balance sobre las distancias promedio viajadas por cada árbitros, incorporamos la siguiente condición, similar a las restricciones (11) del MATCH:

$$\frac{1}{T^a}\sum_{f,k} DClus(a,k)\cdot z_{a,k,f} - \frac{1}{T^r}\sum_{f,k} DClus(r,k)\cdot z_{r,k,f} \leq DISTMAX$$

$$\forall\, a, r \in A. \tag{26}$$

Al igual que en las restricciones (12), consideramos que todo patrón respeta el número de fechas libres consecutivas que puede pasar un árbitro sin dirigir.

$$\sum_{s=0}^{S^a} z_{a,Libre,f+s} \leq S^a \qquad \forall\, a \in A,\ f < |F| - S^a. \tag{27}$$

Restricciones lógicas y función objetivo. Calculamos la variable dif_a análogamente a como en las restricciones (13) y (14) del modelo MATCH, esta vez sumando las variables z en las regiones geográficas en vez de las variables x.

$$\sum_{f}\sum_{k \neq L} z_{a,k,f} + dif_a \geq T^a \qquad \forall\, a \in A. \tag{28}$$

$$\sum_{f}\sum_{k \neq L} z_{a,k,f} - dif_a \leq T^a \qquad \forall\, a \in A. \tag{29}$$

Finalmente, la función objetivo sigue siendo la misma que en el MATCH.

$$\min g = \sum_{a=1}^{|A|} dif_a \tag{30}$$

Nos referiremos a este modelo que genera los patrones como GP_MATCH.

4.2.2. Modelo de asignación en base a patrones

Luego de haber generado los patrones según el GP_MATCH, procedemos a realizar la asignación de árbitros a partidos según el modelo de optimización lineal entera que exponemos a continuación.

Al igual que en el modelo anterior, los parámetros y conjuntos que ya hemos definido siguen teniendo el mismo significado.

- **Conjuntos y Parámetros adicionales**

  Q: Conjunto de patrones.

  $PKF(k, f)$: Conjunto de partidos que se juegan en el cluster k en la fecha f.

  $TKF(k, f)$: Conjunto de patrones que asignan dirigir en el cluster k en la fecha f.

- **Variables**

  $$x_{a,p} = \begin{cases} 1 & \text{si el árbitro } a \text{ es asignado para dirigir el partido } p \\ 0 & \sim \end{cases}$$

  $$y_{a,w} = \begin{cases} 1 & \text{si el patrón } w \text{ es asignado al árbitro } a \\ 0 & \sim \end{cases}$$

  dif_a = Diferencia entre la meta predefinida de partidos a dirigir por el árbitro a y la cantidad de partidos efectivamente asignados.

- **Restricciones y Función Objetivo**

  Restricciones sobre los patrones y su relación lógica con las variables x. A cada árbitro se le asigna un patrón:

  $$\sum_{q \in Q} y_{a,q} = 1 \qquad \forall\, a \in A. \tag{31}$$

  En la práctica, fijamos el valor de estas variables y según la generación de patrones que realizamos en el GP_MATCH.

  Lógicamente, imponemos una condición que relacione las variables x e y:

  $$\sum_{p \in PKF(k,f)} x_{a,p} - \sum_{q \in TKF(k,f)} y_{a,q} = 0 \qquad \forall\, a \in A,\ k \in K,\ f \in F. \tag{32}$$

Adicionalmente, en este modelo consideramos en forma explícita las restricciones del MATCH, que no necesariamente hemos asegurado según la generación de patrones realizada en el GP_MATCH: (1), (3), (6), (7), (8), (11).

Finalmente, mantenemos la función objetivo (15) del MATCH. Nos referiremos a este modelo como AP_MATCH.

5. Resultados

Utilizamos como instancia la fase regular del torneo de fútbol chileno de Primera A del año 2007. Esta instancia cuenta con 21 equipos (uno queda libre cada fecha), 16 árbitros y 420 partidos (42 fechas -incluyendo Apertura y Clausura-, en cada una de las cuales se juegan 10 partidos). El MATCH de esta instancia contiene alrededor de 6.700 variables y 10.000 restricciones.

Implementamos los modelos de optimización en GAMS 22.7 y para su resolución utilizamos el software comercial Cplex 11.0, en un computador de procesador Intel Pentium de 1.86GHz y 2GB de RAM.

A continuación discutimos los resultados obtenidos.

5.1. Características de la solución

El problema fue resuelto a optimalidad, utilizando el enfoque de resolución sin patrones, alcanzando un valor igual a cero en la función objetivo. Esto significa que la solución cumple con que todos los árbitros dirigen su meta de partidos. Además, la solución presenta varias otras bondades.

Primero, imprime un equilibrio relativo en la distancia recorrida por los árbitros. Considerando que en un escenario perfectamente balanceado el promedio de partidos dirigidos por árbitro es 26,25 (calculado como $|P|/|A|$), cada árbitro recorrería una distancia promedio por partido de 847,8 km. En tanto, el promedio de partidos dirigidos por cada árbitro a cada equipo sería igual a 2,5. Los parámetros correspondientes (cotas superiores e inferiores de las variables que se quieren balancear) fueron entonces fijados de manera de acercarse lo mayor posible a estas cifras. Al comparar los valores presentes en la asignación real del año 2007 (que la Comisión Arbitral de la ANFP confeccionó en forma tradicional), con los que se consiguieron como resultado del modelo se observan mejoras en todo ellos, según se muestra para la instancia de resultados de la Tabla 1.

Ítems	**Asignación 2007**	**Resultado Modelo**
Mínima cantidad de partidos que dirige en total un árbitro	24	26
Máxima cantidad de partidos que dirige en total un árbitro	36	28
Mínima cantidad de partidos que dirige en total un árbitro a un mismo equipo	0	1
Máxima cantidad de partidos que dirige en total un árbitro a un mismo equipo	7	4
Mínima distancia por partido promedio recorrida por un árbitro	308	571
Máxima distancia por partido promedio recorrida por un árbitro	1.192	1.002
Número de veces que un árbitro fue asignado a dirigir dos partidos consecutivos del nivel más alto	1	0
Máxima cantidad de fechas transcurridas en que un árbitro no es asignado para dirigir	4	2

Tabla 1: Comparación de los distintos ítems entre la asignación de árbitros real del 2007 y el resultado del modelo de optimización.

Para las distancias promedio recorridas por árbitros, la asignación del año 2007 presenta una desviación estándar de 268,96, mientras que la asignación resultante del modelo una de 128,02.

De igual manera, para la cantidad total de partidos dirigidos por árbitro, la desviación estándar disminuyó de 2,96 en la asignación real del 2007 a 0,58 en el resultado del modelo. Notar que el árbitro que más dirige en nuestra asignación lo hace en 28 partidos, mientras que el que menos dirige lo hace en 26 oportunidades, mientras que en la asignación del 2007 esos números son 36 y 24, respectivamente.

A su vez, el año 2007 la varianza de la cantidad de asignaciones por árbitro a equipos fue de 2,64, mientras que en la instancia reportada en la Tabla 1, el modelo obtuvo una asignación con 1,32 de varianza, es decir un 50 % menor. Este es un tema particularmente sensible para la prensa y los simpatizantes de los clubes por lo que es bueno equilibrarlo. En la instancia real, los valores mínimo y máximo de la cantidad de veces que dirige un árbitro a un mismo equipo son 0 y 7, respectivamente, mientras que en nuestra propuesta esos valores se llevan a 1 y 4. En otra de las instancias que resolvimos (en la que también se obtuvo F.O. igual a 0), redujimos la brecha entre la mínima y la máxima cantidad de veces que un árbitro le dirige a un mismo equipo al mínimo posible (2 y 3 respectivamente), alcanzando una varianza de 0,25.

5.2. Tiempo de resolución

A los efectos de comparar los tiempos de resolución del modelo original y el modelo con patrones, generamos 4 nuevas instancias del problema modificando algunos de los valores de los parámetros. En todos los casos ambos modelos alcanzaron el valor óptimo. La Tabla 2 muestra los tiempos obtenidos para dichas instancias.

Inst.	T_{MATCH}	T_{GP_MATCH}	T_{AP_MATCH}	$T_{GP\_MATCH} + T_{AP\_MATCH}$	Δ %
1	173	2	127	129	-25,4 %
2	625	4	353	357	-42,9 %
3	280	5	93	98	-65,0 %
4	243	4	100	104	-57,2 %

Tabla 2: Tiempos de resolución (medido en segundos).

La segunda columna muestra el tiempo en que resolvemos el MATCH y la quinta columna (suma de la tercera y la cuarta) muestra el tiempo total en que resolvemos el problema mediante el enfoque de patrones. Por último, en la sexta columna, se calcula la reducción de tiempos. En promedio, redujimos el tiempo de resolución en aproximadamente 48 %.

6. Conclusiones

Este artículo contribuye en dos líneas. Primero, hemos desarrollado un modelo de optimización lineal entera para la asignación de árbitros a los partidos del torneo de la Primera División A del fútbol chileno. El modelo combina algunas de las ideas presentadas en la literatura con conceptos aplicados por la Comisión Arbitral del fútbol chileno.

La metodología que tradicionalmente ha utilizado la ANFP para realizar esta tarea carece de herramientas sofisticadas y de criterios objetivamente estructurados. Semana tras semana, la Comisión Arbitral designa los árbitros que dirigirán cada partido en forma manual. Analizando las asignaciones implementadas en los últimos torneos, constatamos varias desventajas: grandes diferencias relativas entre las distancias promedio de viaje de los árbitros, desbalance en el número de partidos totales que arbitra cada uno, frecuencias indeseables de asignación de un mismo árbitro a un mismo equipo (en algunos casos, una cantidad relativamente alta de partidos; en otros casos, nula). Nuestro modelo mejora significativamente todos estos aspectos, logrando una asignación mucho más equitativa, tanto para los árbitros como para los equipos. Además, facilita la tarea de asignación y la hace más transparente, al fijar criterios de decisión claros.

Junto con dichas mejoras, el modelo también presenta la ventaja de poder generar rápidamente varias alternativas de asignaciones, que cumplen con todas las condiciones (aun más, para las instancias estudiadas, generamos más de una solución que conduce al valor óptimo en la F.O.). En la práctica, esto permitiría ofrecer una variedad de opciones a la ANFP para su elección final de cuál sería la asignación a implementar. Además, el desarrollo realizado de una interfaz amigable para el usuario permite que la herramienta sea manejada sin problemas directamente por la Comisión Arbitral.

Otra ventaja del modelo es que la solución entregada puede ser utilizada tanto para la asignación completa del campeonato, como para una determinada cantidad de fechas a partir del momento de ejecución. La restricción de fijación de variables permite modelarlo en distintos instantes del tiempo, incorporando las asignaciones que efectivamente han sido realizadas y modificando los parámetros que corresponda.

Por otro lado, el modelo presentado permitiría incorporar más de un campeonato en la instancia a resolver. Esto es interesante para ligas de más de una división que compartan árbitros entre ellas. Por ejemplo, en el caso de Chile, se podría resolver el campeonato de Primera A y Primera B en forma conjunta, modificando los parámetros de niveles de partidos y categorías de árbitros para permitir que ciertos árbitros que *a priori* están destinados para dirigir partidos en Primera A, lo puedan hacer en la Primera B y viceversa.

Un tema interesante de explorar atañe a la localidad que es considerada como origen para los árbitros. Este es un parámetro del modelo y puede ser modificado si es deseable, por ejemplo, que un árbitro sea asignado a dirigir dos partidos muy cercanos en fecha y lejanos de la localidad origen, de manera de aprovechar el largo viaje que tendrá que hacer. Esto podría conseguirse considerando en la función objetivo del modelo las distancias o tiempos totales a recorrer por los árbitros.

La segunda contribución de este artículo es el desarrollo de un enfoque de resolución basado en patrones. Un enfoque similar ha sido amplia y exitosamente utilizado en la programación de fixtures, otro de los problemas que aborda el *Sports Scheduling*. En dicho caso, los patrones definen secuencias de localías y visitas para los equipos que, generadas y fijadas bajo ciertos criterios, facilitan enormemente la resolución de los problemas de tamaño real. Aún más, el enfoque de patrones suele ser crucial para encontrar soluciones factibles en esos problemas. En nuestro caso, construimos patrones que definen para cada árbitro y cada fecha del torneo, la zona geográfica en que dirige o si queda libre. Implementamos el enfoque mediante un modelo de programación lineal entera de dos fases: la primera, que genera los patrones y la segunda, que los usa para encontrar la asignación de árbitros a los partidos del torneo. El tiempo de resolución que logramos usando este enfoque, reduce notablemente el tiempo que toma la resolución de la formulación original del problema.

Según nuestro conocimiento, el presente artículo es el primero en proponer un enfoque de patrones para la resolución de un problema de asignación de árbitros a un torneo deportivo.

Actualmente, la ANFP está evaluando utilizar el modelo y la técnica de resolución presentados en este artículo, para realizar la asignación de árbitros a los torneos del fútbol profesional chileno.

Agradecimientos: A Salvador Imperatore, Harold Mayne-Nicholls y Carlos Morales, de la ANFP, por su colaboración para la concreción de este proyecto. El segundo autor es parcialmente financiado por el proyecto FONDECyT 1080286 y por el Instituto Milenio “Sistemas Complejos de Ingeniería”.

Referencias

[1] Bartsch T., Drexl A., Kröger S. Scheduling the professional soccer leagues of Austria and Germany. Computers and Operations Research (2006) 33 (7), 1907-1937.

[2] Cain Jr W.O. The computer-assisted heuristic approach used to schedule the major league baseball clubs. In: Ladany SP, Machol RE., editors. Optimal strategies in sports. Amsterdam: North-Holland (1977), 33-41.

[3] De Werra D., Jacot-Descombes L., Masson P. A constrained sports scheduling problem. Discrete Applied Mathematics (1990) 26 (1), 41-49.

[4] Dinitz J.H., Stinson D.R. On assigning referees to tournament schedules. Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications (2005) 44, 22-28.

[5] Duarte A., Ribeiro C., Urrutia S. Referee Assignment in Sport Tournaments. Lecture Notes in Computer Science (2007) 3867, 158-173.

[6] Durán G., Guajardo M., Miranda J., Sauré D., Souyris S., Weintraub A., Wolf R. Scheduling the Chilean Soccer League by Integer Programming. Interfaces (2007) 37 (6), 539-552.

[7] Easton K., Nemhauser G., Trick M. The traveling tournament problem: description and benchmarks. In Proceedings of the 7th. International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming, Paphos (2001), 580-584.

[8] Gil La Fuente J., Rojas Mora J. La idónea asignación arbitral con altos niveles de incertidumbre. Empresa global y mercados locales: XXI Congreso Anual AEDEM (2007) 1, 69-80.

[9] Goossens D., Spieksma F. Scheduling the Belgian Soccer League. Interfaces (2009) 39 (2), 109-118.

[10] Nemhauser G.L., Trick M.A. Scheduling a major college basketball conference. Operations Research (1998) 46, 1-8.

[11] Rasmussen R.V., Trick M.A. Round robin scheduling - a survey. European Journal of Operational Research (2008) 188, 617-636.

[12] Trick M.A., Yildiz H. The Traveling Umpire Problem. Informs Annual Conference, Pittsburgh, Noviembre 2006.

[13] Yavuz M., Inan U.H., Figlali A. Fair referee assignments for professional football leagues. Computers & Operations Research (2008) 35 (9), 2937-2951.

[14] Wright M.B. Scheduling English cricket umpires. Journal of the Operational Research Society (1991) 42 (6), 447-452.